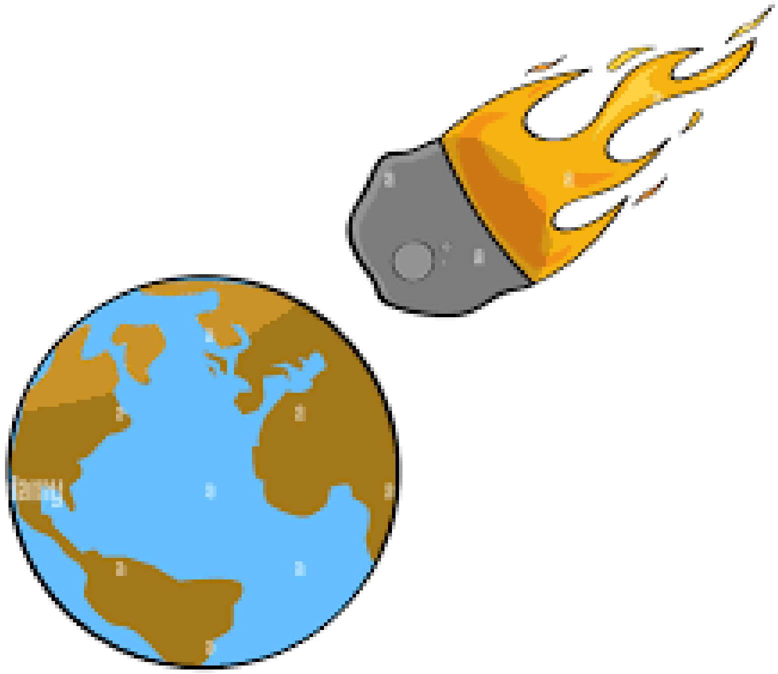


¡Meteorito a la vista!

Integral indefinida y aplicaciones de la integral

por:

Lauro Morales Montesinos

METODOLOGÍA y CONTENIDOS

En esta actividad estudiaremos con que rapidez se desintegra un meteorito al entrar en la atmosfera y me gustaría que juntos analicemos este problema y plateemos modelos muy simplificados para este problema. La actividad está planteada para realizarla en tres sesiones de 50 minutos, de los cuales algunas actividades serán grupales y síncronas mientras que algunas otras serán individuales y asíncronas esto será especificado en cada una de las actividades.

Esta actividad tiene transversalidad con gran parte del plan de estudios de Matemáticas VI área 1 y 2 así como el plan de estudios de Matemáticas V y Física 1. A continuación, presento algunos de los contenidos que cubrirás en esta actividad:

CONCEPTUALES	PROCEDIMENTALES	ACTITUDINALES
Integral indefinida y propiedades de linealidad.	Obtención de constantes de la constante de integración a partir de condiciones iniciales.	Valoración de la interrelación de los contenidos matemáticos estudiados durante su formación en el bachillerato.
Aplicación de la integral al cálculo de longitudes de arco.	Obtención de áreas limitadas por curvas con base en las nociones de medida semejanza y simetría.	Reconocimiento de la importancia de la autonomía de la adquisición del conocimiento a través del estudio y la investigación.
	Uso de la tecnología para representación de áreas y volúmenes.	

OBJETIVOS

Determinar el tipo de trayectoria siguen los meteoritos influenciados por la atracción gravitacional de la tierra.

Utilizar a la integral indefinida para modelar la masa perdida por un meteorito al viajar en la atmosfera asumiendo la tasa de pérdida de masa conocida.

Utilizar la integral para determinar longitudes de arco de curvas.

BIBLIOGRAFÍA

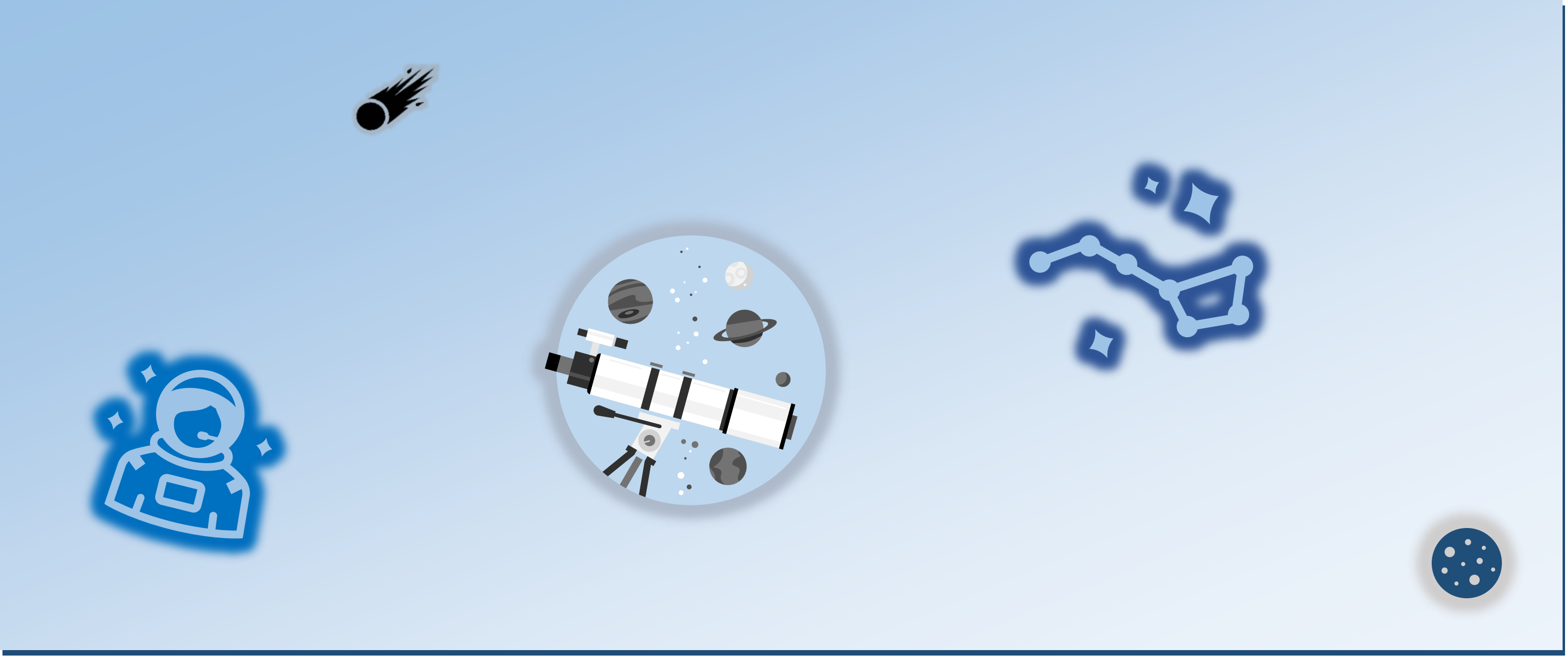
Cálculo Integral. Samuel Fuenlabrada de la Vega Turcíos e Irma Rosa Fuenlavada Velásquez. McGraw-Hill Interamericana, 4ª edición 2013.

Cálculo Integral. Manuel René Jiménez y Rosa María Estrada Coronado. Pearson Educación de México. 1ª edición. 2017.

Física. Jerry D. Wilson, Anthony J. Buffa y Bo Lou, Pearson. 6a edición. 2007.

Física 1. Josip Slisko Ignjatov. Pearson educación de México. 4ª edición. 2016.

Geometría analítica y Trigonometría. Elena de Oteyza de Oteyza. Pearson educación de México, 1ª edición. 2001.



INFORMACIÓN CURIOSA

Como sabes los meteoritos son una amenaza constante para la tierra, se estima que hay más de 10000 meteoritos cuya trayectoria es cercana a la posición de la tierra (aproximadamente 0.3 Unidades

Los radios de los meteoritos varían desde unos cuantos metros hasta 32 kilómetros y aproximadamente 1000 de ellos tienen como mínimo 1km de diámetro.

¡Pero no te asustes!, ya que es muy poco probable que meteoritos de gran tamaño impacten la tierra, aun así, hay algunos pequeños objetos que logran llegar hasta nosotros. Afortunadamente la atmósfera nos defiende de algunos de estos embates ocasionales ya que, por las altas temperaturas de la termosfera, partículas cargadas y demás, los meteoritos empiezan a desintegrarse y eso es lo que apreciamos en las estrellas fugases.

PREGUNTAS DE REFLEXIÓN

1. ¿Qué cantidades físicas crees que son relevantes para el modelado de la pérdida de masa en el meteorito y el tipo de trayectoria que seguirá?
2. ¿Crees que la velocidad con la que llega el objeto a la atmosfera es importante?, ¿Por qué?
3. ¿Qué pasa con el radio de objeto y su masa?, ¿son de importancia?
4. ¿Crees que importe la dirección del ángulo de ataque del objeto contra la atmosfera?
5. ¿Una vez que entra a la atmosfera, el objeto se mueve en línea recta?
6. ¿Importa la distancia de recorrida por el objeto una vez que entra en atmosfera?
7. Con tu equipo investiga y discute que son y para que sirven las leyes de Kepler

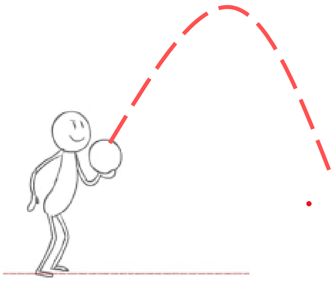
ALGO PARA PENSAR …

Como te diste cuenta por las preguntas anteriores, el modelar el comportamiento de los meteoritos al entrar en la atmosfera terrestre puede ser muy complicado algunos de estas dificultades son las siguientes:

a. El meteorito no se mueve en línea recta.
b. Al desplazarse parte del material que lo conforma se quema o se desprende del objeto debido a la fricción con el aire y el hecho de que el material puede cargarse electrostáticamente por las cargas eléctricas en la atmosfera.
c. La turbulencia generada al desplazarse es un fenómeno muy complicado de estudiar que a la fecha no tiene solución.

En las siguientes lecciones discutiremos los objetivos planteados colocando alguna hipótesis extra en cada paso. El objetivo final será sumar estos tres efectos para dar una descripción aproximada del problema.

RESPECTO A LA TRAYECTORIA

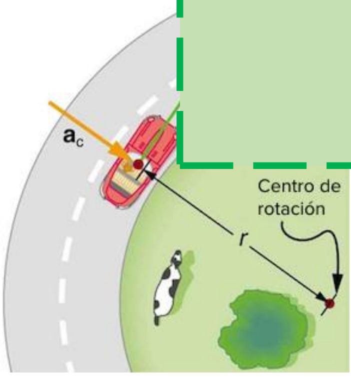


De la experiencia diaria, sabemos que la atracción gravitacional cualquier cosa que soltemos caerá al piso y si la arrojamos con cierta velocidad, esta recorrerá una curva con forma de parábola hasta caer al piso. Por ello no es de extrañar que el movimiento del meteorito describa una curva semejante por efecto de atracción gravitacional entre el meteorito y la tierra.

PREGUNTAS DE REFLEXIÓN

Observa el siguiente video y discutas las siguientes preguntas:

1. El caballo de juguete sólo se desplaza en línea recta, ¿bajo que condiciones se logra que camine en círculos?
2. ¿Tienes alguna explicación de esto?
3. Con esto en mente, ¿Qué efecto tiene el cordón sobre el caballo?
4. ¿En qué dirección tira el cordón del caballo?
5. ¿Si pensamos que sobre el cordón actúa una fuerza, esta fuerza afecta la rapidez con que se desplaza el caballo o la dirección en la que se desplaza?
6. A que conjetura puedes llegar respecto a que tipo de fuerza afecta la dirección del movimiento.
7. En el problema del meteorito, ¿hay alguna fuerza semejante que cambien la dirección de desplazamiento?



Como observaste sobre el cordón actúa una fuerza ortogonal al desplazamiento del caballo, este tipo de fuerzas cambian la dirección del movimiento. En nuestro caso, tendremos un efecto semejante debido a la atracción de la gravedad.

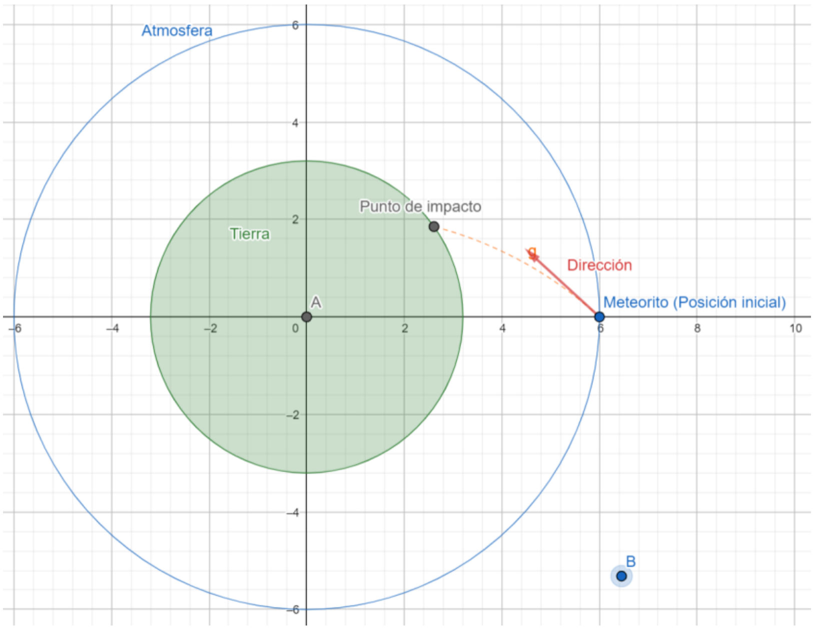
¡SIMPLIFICACIÓN!

Para simplificar el análisis de la trayectoria del meteorito, asumiremos que el objeto no pierde masa, ya que si lo hiciera las ecuaciones podrían tornarse muy complicadas.

Si esto sucede observa que podemos dar una solución exacta al problema usando una analogía con el movimiento planetario y las leyes de Kepler junto con el cálculo diferencial e integral que has aprendido durante estos primeros meses que tenemos trabajando.

En el siguiente link puedes jugar un poco con una trayectoria que simula el movimiento del meteorito.

https://www.geogebra.org/m/tepszqxr



Ahora espero que estés ansioso por saber cómo es que encontramos este tipo de trayectorias.

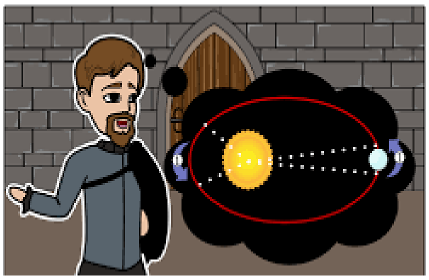
La fuerza de atracción

meteorito ← → Tierra

=

Tierra ← → Sol

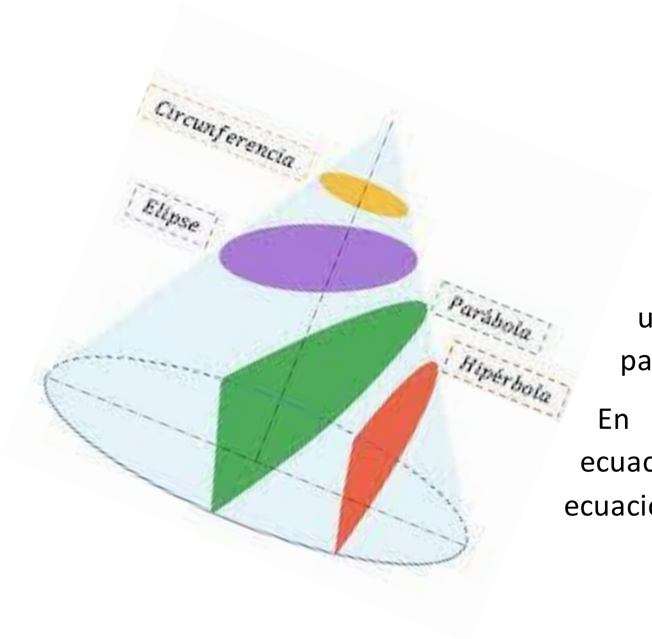
Por las leyes de Kepler sabemos que en el sistema Sol-Tierra, la Tierra orbita alrededor del Sol en una trayectoria elíptica con el Sol sobre uno de sus focos.



¿Qué sucederá en nuestro sistema Tierra-meteorito?

Dependiendo de las condiciones de movimiento del meteorito puede tratarse de una **elipse**, como en el caso de los planetas, **parábolas** o **hipérbolas**

La trayectoria a seguir por el meteorito debe ser una **cónica**



El applet anterior supone que la trayectoria es una elipse, pero se puede modificar fácilmente para trayectorias hiperbólicas.

En los siguientes ejercicios probarás que la ecuación paramétrica de las cónicas es solución a las ecuaciones que rigen el movimiento del meteorito.

Actividad Evaluable (Cónicas)

En el curso de Matemáticas V se revisa la ecuación general de las cónicas canónicas es:

$$AX^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Y dependiendo de los valores de los coeficientes A y B sabemos si se trata de un círculo, una parábola, una hipérbola o una elipse.

Ahora te presento la una nueva representación de las cónicas escrita, pata esta usamos coordenadas polares, es decir $(x, y) = (r\cos\theta\,, r\,\sin\theta)$. En este caso el radio r es una función del ángulo polar θ. Para el caso de las cónicas, la relación funcional entre el radio y el ángulo está dado por:

$$r = \frac{l}{1 + \epsilon\, cos(\theta)} \quad (1)$$

https://www.geogebra.org/calculator/zed2nux8

En la liga anterior encuentras un applet de GeoGebra en donde he escrito las ecuaciones anteriores para hacer el trazo de la ecuación de las cónicas. En ella se observan dos deslizadores uno para la excentricidad ϵ y otro para el lado recto l.

Instrucciones:

i. Deja fijo el valor del lado recto y varía el valor de la excentricidad. Observa que sucede.
ii. Ahora deja fijo el valor de la excentricidad y varía el valor del lado recto. Observa que sucede.

En base a lo observado responde las siguientes preguntas:

1. ¿La excentricidad ϵ afecta el tipo de cónica dibujada?
2. ¿El lado recto l afecta el tipo de cónica dibujada?
3. Una vez que identificaste que parámetro afecta el tipo de cónica,
   a. ¿para qué valores de este parámetro se tiene una circunferencia?
   b. ¿Para qué valores de este parámetro se tiene una parábola?
   c. ¿Para qué valores de este parámetro se tiene una elipse?
   d. ¿Para qué valores de este parámetro se tiene una hipérbola?
4. ¿Qué papel juega el origen en esta representación de las cónicas?
5. En esta representación, ¿existe algún parámetro para trasladar a la cónica a cualquier punto del espacio?
6. En la ecuación general de las cónicas canónicas del inicio de la actividad hay cinco parámetros $(A, B, C, D$ y $E)$, ¿por qué en esta ecuación de las cónicas hay solo dos parámetros? **Hint**: piensa en tus respuestas a las preguntas 4 y 5.

Actividad Evaluable (Cónicas como trayectorias de meteoritos)

En esta actividad mostraremos paso a paso que la ecuación de las cónicas es solución al movimiento del meteorito. Para ello recuerda que el movimiento de cualquier objeto que viaja a velocidad moderada se rige por la segunda ley de Newton

Sí:

$\boldsymbol{F}$ es la **fuerza** qué actúa sobre el meteorito debió a la interacción gravitacional entre él y la Tierra.

$\boldsymbol{m}$ es la **masa** del meteorito.

$\boldsymbol{a}$ es la **aceleración** que experimenta el meteorito

$$F = m\,a \tag{2}$$

De las clases de Física I sabemos que la interacción gravitacional sobre el meteorito debido a la Tierra tiene dirección *hacia la tierra* y magnitud dada por:

Sí:

$\boldsymbol{G}$ es la **constante** de gravitación universal y tiene como valor ().

$\boldsymbol{M_T}$ es la **masa** de la Tierra

$$F = -\frac{GM_T m}{r^2} \tag{3}$$

Recordemos de las clases de Física I sabemos que la **aceleración** tiene componente **radial** dada por

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{4}$$

Además, se sabe que en este movimiento el **momento angular** φ se conserva, de modo que:

$$\varphi = r^2\frac{d\theta}{dt} \tag{5}$$

es una **constante**.

En los siguientes puntos realiza las operaciones necesarias en cada paso y completa cada una de las ecuaciones indicadas.

1. Utiliza las ecuaciones (4) y (5) para dar una ecuación de la aceleración a en términos del momento angular φ.
2. Sustituye la expresión que encontraste del paso anterior y la ecuación (3) en la segunda ley de Newton (2), deberás obtener:

$$-\frac{GM_T}{r^2} = \tag{6}$$

3. De la ecuación (1) de la actividad de cónicas, despeja el término $\frac{l}{r}$

$$\frac{l}{r} = \tag{7}$$

4. Asumiendo que las variables radiales y angulares dependen del tiempo, calcula

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{l}{r}\right) = \tag{8}$$

   Recuerda que l es constante.

5. Multiplica la ecuación (8) que obtuviste en el paso anterior por r^2, identifica el término del momento angular y sustitúyelo por la letra φ, recuerda que él es una constante.

$$l\frac{dr}{dt} = \tag{9}$$

6. A la expresión que obtengas en (9) derívala implícitamente respecto al tiempo asumiendo que sólo r y θ dependen del tiempo. Si hiciste los pasos anteriores de manera correcta debiste llegar a

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{\varphi^2\epsilon}{lr^2}\cos\theta \tag{10}$$

7. Sustituye la ecuación (10) en tu expresión de la ecuación (6) y simplifica, quizá debas usar que por ser una cónica se satisface que $\epsilon\cos\theta - {}^{l}/_{r} = 1$. La ecuación a la que debes llegar es de la forma

$$\frac{?}{r^2} = \frac{?}{r^2} \tag{11}$$

   ¿Qué términos van en los numeradores?

8. Si hiciste las cuentas de manera correcta notarás que ambos términos en los numeradores son constantes, ello implica que puedes cancelar los denominadores y obtener que las cónicas son posibles trayectorias a seguir por el meteorito; pero esto sólo sucede cuando

$$\varphi = GM_T l \tag{12}$$

   Es decir, el momento angular (constante) es igual al producto de la constante de gravitación universal por la masa de la Tierra y el lado recto de cónica.

Conclusión

En la actividad anterior mostramos que las cónicas son posibles trayectorias para el movimiento del meteorito. Lamentablemente esto es a lo más que podemos llegar con las matemáticas que tenemos disponibles. También es importante que recuerdes que este es una primera aproximación a la trayectoria real, ya que, en el caso real ocurre el fenómeno de pérdida de masa que NO incorporamos en este modelo.

- ✓ Revisé otra forma de parametrizar a las cónicas usando una representación polar en términos de la excentricidad y el lado recto.
- ✓ Revisé y apliqué la técnica de derivación implícita.
- ✓ Probé que las cónicas son posibles trayectorias del movimiento de un meteorito cuando despreciamos la pérdida de masa.
- ✓ Revisé las leyes de Kepler y la segunda ley de Newton.

RESPECTO A LA PERDIDA DE MASA

Como comentamos al principio de la clase modelar el problema real de la pérdida de masa es muy complicado debido a la interacción del meteorito con la atmosfera y posibles fragmentaciones del proyectil.

ALGO PARA PENSAR …

En el análisis de la trayectoria del meteorito, nosotros NO obtuvimos la evolución temporal del proyectil. ¿Entonces que obtuvimos? Si recuerdas sólo probamos que el meteorito se debe mover a lo largo de una cónica pero nunca hablamos de la rapidez con la que se desplaza en estas curvas.

En base al párrafo anterior, ¿crees que es conveniente escoger una tasa de pérdida de masa temporal (respecto al tiempo dentro del atmosfera) o espacial (respecto a la distancia recorrida)?

Con todo lo comentado, es razonable asumir una *tasa espacial* de pérdida f en este problema. Es decir, de pérdida de masa debe depender de la distancia recorrida, es decir $f(x)$ representa el cambio de la masa del meteorito respecto a la distancia x recorrida.

PREGUNTAS DE REFLEXIÓN:

1. Si asumimos esta función conocida ¿Cómo encuentras la masa del meteorito una vez que ya recorrió x km?

2. Piensa que la tasa espacial de perdida de masa esta dada por la función

$$f(x) = 0.5x + 0.2\ ton/km \tag{13}$$

   donde x es la distancia en kilómetros recorrida por el meteorito. Realiza una gráfica de esta tasa espacial de pérdida de masa.

3. En la gráfica anterior discute con tu equipo ¿qué objeto geométrico representa la masa perdida hasta 1 km? Utiliza la idea intuitiva de integral.

4. Si piensas que la integral es aproximada a una suma, es decir

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{14}$$

   y asumes que x tiene unidades de km ¿Cuáles serán las unidades que debe tener la integral?

5. En base a las preguntas anteriores, ¿cuál debe ser el valor del límite de integración inferior y porqué?

6. Una ves que sabes cual debe ser el limite inferior de la integral, respecto a la pregunta 3, ¿que operación matemática me dará la masa perdida por el meteorito después de recorrer 1km? ¿Cómo se cambia esta operación si quiero saber la masa perdida por el meteorito después de recorrer 2km? ¿Cómo se cambia esta operación si quiero saber la masa perdida por el meteorito después de recorrer s kilómetros?

7. Imagina que ahora cambias de tasa espacial de pérdida de masa a otra función $g(x)$, cual es la operación matemática que determina la masa perdida por el meteorito después de recorrer s kilómetros?

De la actividad anterior, nos damos cuenta que sí asumimos una tasa espacial de **pérdida de masa** dada por $f(x)$ entonces la **masa** perdida (en toneladas) por el **meteorito** después de recorrer s kilómetros esta dada por la expresión

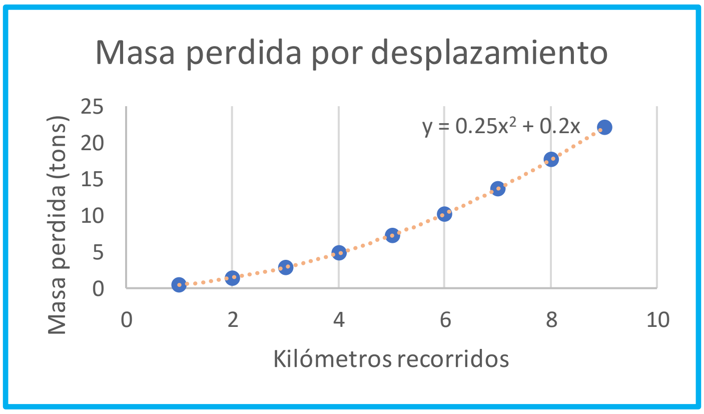
$$\int_0^s f(x)dx \tag{15}$$

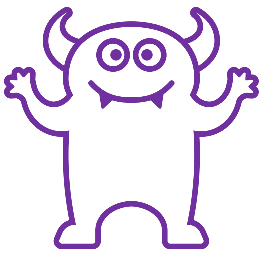
Observa que esta integral es una nueva función que depende de s ya que dado cada valor de esta variable se le asigna el valor de la integral definida de f entre $x = 0$ y $x = s$. Esta expresión recibe el nombre de *integral indefinida* ya que su límite superior no tiene un valor definido en particular, sino que es una nueva función $F(s)$.

$$F(s) := \int_0^s f(x)dx \tag{16}$$

Para el caso de la tasa espacial dada en la ecuación (13), realizamos una tabla con distintos valores de la distancia recorrida y esto fue lo que obtuvimos:

Distancia recorrida	*Masa perdida*
1	0.45
2	1.4
3	2.85
4	4.8
5	7.25
6	13.65
7	17.6





Con la tabla, sólo graficamos unos cuantos puntos, pero es evidente que todos ellos pertenecen a una misma curva $F(s) = 0.25s^2 + 0.2s$.
En muchos casos podrá encontrarse explícitamente el valor de la integral indefinida usando métodos de integración, pero en muchos otros esto NO es posible, aun así debes saber que **la integral indefinida** es una función que **existe** independientemente de nuestras habilidades de integración.

El siguiente applet de GeoGebra muestra **tres tasas** espaciales de **pérdida de masa** de diferente índole, la primera de ellas es continua, la segunda tiene un pico (no es diferenciable) y la tercera tiene saltos.

https://www.geogebra.org/calculator/s6ftpb5x

En cualquiera de los tres casos se presenta la curva de la integral indefinida para cualquiera de los tres casos y se puede animar el valor de masa perdida para cada una de estas tasas en función de la distancia recorrida.

Juega con ella y al terminar responde las siguientes preguntas:

1. ¿La continuidad de la integral indefinida depende de si la tasa de pérdida de masa es continua?
2. Para una masa de 4 toneladas a ¿qué distancia recorrida el meteorito se desintegrará para cada una de las tres distintas tasas espaciales de pérdida de masa propuestas?

Como podrás darte cuenta una propiedad de la integral indefinida es que es una función continua

Ahora ya sabes cómo calcular la masa pérdida por el meteorito al recorrer cierta distancia

El siguiente paso es determinar la longitud de la trayectoria del meteorito, pues como sabemos, este no se mueve en línea recta.

Conclusión

En esta actividad revisamos que la integral indefinida

$$F(s) \coloneqq \int_0^s f(x)dx$$

es una función a cada valor s del límite superior le asocia un número que representa el área bajo la curva $f(x)$ y entre las rectas verticales $x = 0$ y $x = s$ y el eje x.

Esta función $F(s)$ es continua independientemente de si el integrando $f(x)$ es o no continuo.

Al ser $F(s)$ una integral, esta función hereda TODAS las propiedades que satisfacen las integrales respecto a los límites de integración, por ejemplo:

- ✓ $F(0) = 0$ "La función F se anula en el límite inferior".
- ✓ $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$ "La integral definida de $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es la diferencia $F(b) - F(a)$".

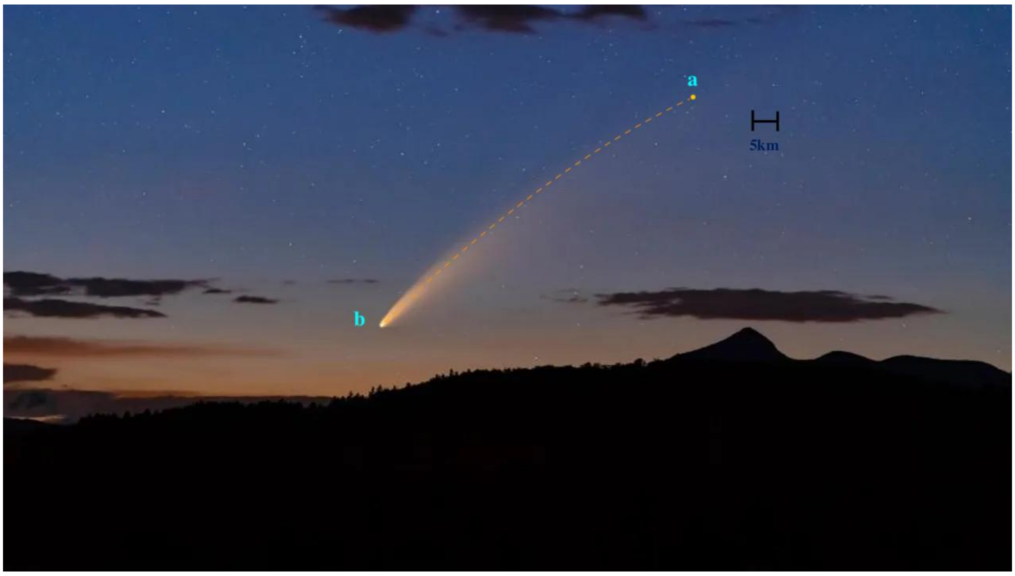
RESPECTO A LA DISTANCIA RECORRIDA

Ahora toca el turno de analizar la distancia recorrida por el meteorito.

Ya sabemos que la trayectoria de uno de esto proyectiles es una cónica, y por tanto el movimiento se realiza en un plano.

Como vivimos en un mundo tridimensional, el capturar la imagen de la trayectoria de un meteorito es una tarea realmente complicada pues como espectadores debemos estar justo frente al plano donde se desarrolle el movimiento, de otro modo, la imagen observada no será una cónica sino sólo una proyección de dicho movimiento

La siguiente imagen obtenida de este link muestra una trayectoria de un cometa (no un meteorito), pero para fines práctico podemos pensar que lo es.



ALGO PARA PENSAR …

Dada la trayectoria marcada entre los puntos a y b y la escala de 5km, ¿cómo puedes encontrar la longitud de la trayectoria seguida por el meteorito entre los puntos a y b?

Una primera aproximación sería trazar el segmento recto entre a y b y medir, ¿puede pensar en algo mejor?

PREGUNTAS DE REFLEXIÓN

1. Utiliza la imagen anterior y utilizando los recursos que creas necesarios (cordones, regla compas, software de edición, etc.) encuentra alguna forma de aproximar la distancia de la trayectoria del meteorito entre los puntos a y b.

2. Con este dado y asumiendo la tasa de pérdida de masa como

$$f(x) = 0.5x + 0.2\ ton/km$$

   encuentra el valor total de la masa perdida en ese cacho de trayectoria.

Actividad evaluable (La integral para el cálculo de longitudes de arco)

Completa cada uno de los incisos que enumerados.

1. Del curso de Matemáticas V sabemos que la distancia entre dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ en el plano cartesiano esta dada por:

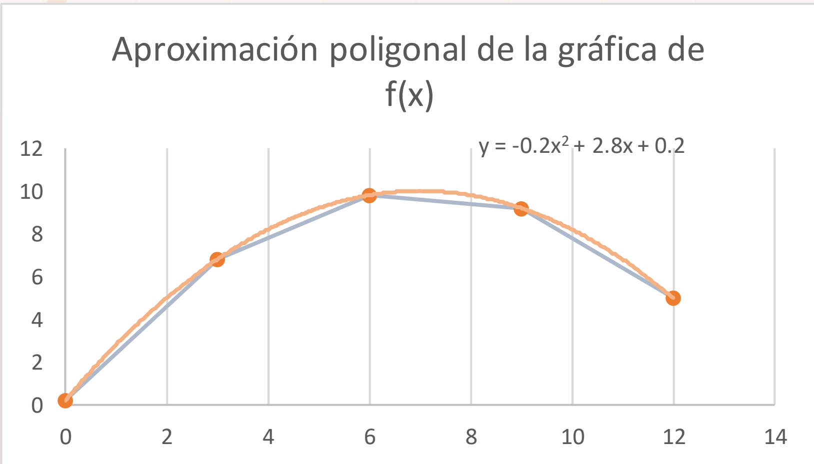
$$dist(A, B) = \qquad \textbf{(17)}$$

En esta actividad aproximaremos la **longitud recorrida** por un **meteorito** cuando la trayectoria es la gráfica de una función $y = f(x)$ por medio de una suma de longitudes de varios segmentos de línea recta. Para fines prácticos asume

$$f(x) = 10 - 0.2(x - 7)^2, \quad 0 \leq x \leq 12$$

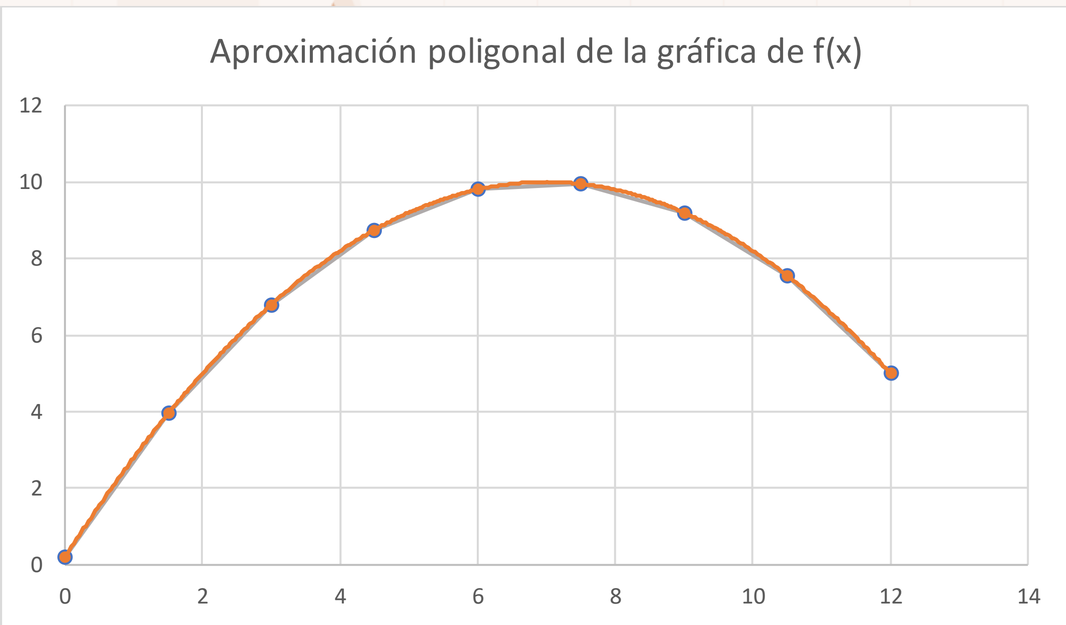
Trataremos de aproximar la gráfica de la función f por medio de segmentos de recta. Observa que la gráfica de $f(x)$ (curva naranja) y la gráfica poligonal (curva gris) generada al unir algunos puntos sobre la curva por segmentos de recta se parece mucho

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
0	0.2
3	6.8
6	9.8
9	9.2
12	5



2. Usando la ecuación que encontraste en (17), determina la longitud de cada segmento que forma a la curva gris y suma tus resultados para dar una primera aproximación.
3. ¿Qué crees que suceda si agregas más puntos a la curva poligonal que estén sobre la gráfica de $f(x)$?

Observa que pasa cuando agregamos el doble de puntos



4. ¿Cómo se comparan la gráfica de $f(x)$ con la curva poligonal?

5. ¿Qué pasa con la aproximación de la longitud del arco al aumentar el número de puntos?

Los puntos usados para construir esta segunda curva poligonal son de la forma $(x, f(x))$ y se reportan en la siguiente tabla.

x	$f(x)$
0	0.2
1.5	3.95
3	6.8
4.5	8.75
6	9.8
7.5	9.95
9	9.2
10.5	7.55
12	5

6. Determina la longitud de cada segmento entre dos puntos consecutivos y súmalos para obtener una segunda aproximación a la longitud de la trayectoria.

En la actividad anterior teníamos un conjunto de puntos de la forma $A_i = (x_i, f(x_i))$ con i igual al número de filas que tenga tu tabla de puntos, recuerda que calculaste la distancia entre dos puntos consecutivos entonces obtuviste una ecuación de la siguiente forma

$$dist(A_{i-1}, A_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)^2} \quad \textbf{(18)}$$

Factorizando el término $(x_i - x_{i-1})^2$ y tomándolo fuera de la raíz tenemos

$$dist(A_{i-1}, A_i) = \left(\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}\right)|x_i - x_{i-1}| \quad \textbf{(19)}$$

Si ahora tomas la suma de todas estas distancias obtendrás:

$$\sum_{i=1}^{n} dist(A_{i-1}, A_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}\right)|x_i - x_{i-1}| \quad \textbf{(20)}$$

Al tomar el límite cuando el número de puntos tiende a infinito el cociente de la raíz se aproxima a $f'(x_i)$ y la suma tiende a la siguiente integral:

$$Longitud\ de\ arco = \int_c^d \sqrt{1 + f'^2(x)}\ dx \quad \textbf{(21)}$$

donde c y d son las coordenadas en x para el punto inicial y final de la trayectoria.

Es decir, la distancia recorrida por el meteorito entre los puntos $a = (x_1, f(x_1))$ y $b = (x_2, f(x_2))$ se determina por la integral

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'^2(x)}\ dx$$

Donde $y = f(x)$ es la ecuación cuya gráfica es la cónica que describe el movimiento del meteorito y $f'(x)$ es la derivada de esta función.

Conclusión

En esta actividad aprendimos que una de las aplicaciones de la integral es en el cálculo de longitudes de arco de curvas y que la ecuación de la longitud de arco es:

$$Longitud\ de\ arco = \int_c^d \sqrt{1 + f'^2(x)}\ dx$$

Donde:

$f(x)$ es la función cuya gráfica nos interesa estimarle su longitud.

$f'(x)$ es la derivada de la función de interés.

c es la coordenada x del primer extremo del segmento de curva.

d es la coordenada x del segundo extremo del segmento de curva.