

## Introducción a ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden

### Objetivo

En estas notas pretendemos dar una visión panorámica a las ecuaciones en derivadas parciales, enfocándonos principalmente en el estudio de las ecuaciones lineales básicas de segundo orden. Presentamos al lector el método de separación de variables como una técnica útil para su resolución cuando el dominio de las variables independientes presenta una geometría rectangular. Como apoyo, se presentan tres applets, construidos por el autor, para discutir las diferencias en la expansión de Fourier par e impar así como para simular las soluciones a algunos ejercicios propuestos para la ecuación de calor y la ecuación de onda. Todo ello con el fin de que el lector pueda practicar con ellas y obtener un mejor entendimiento de los términos en cada ecuación así como la importancia de las condiciones iniciales y de frontera en la solución.

### 1. Introducción

En los temas previos a esta sección se revisaron a detalle las ecuaciones diferenciales ordinarias donde existen solo dos variables, una dependiente de la otra y que satisfacen una ecuación donde intervienen derivadas totales de una respecto a la otra. Por ejemplo,

$$\frac{dv}{dt} = \alpha v, \quad \text{ó} \quad \frac{d^2u}{dx^2} + \nu \frac{du}{dx} + k^2u = 0.$$

En este tipo de ecuaciones, la variable independiente es una *coordenada espacial*,  $x$  o una *coordenada temporal*  $t$ , pero no ambas, como se aprecia en los ejemplos anteriores. Estas ecuaciones tienen una familia de soluciones cuando no se les impone una restricción extra, pero si se prescribe una condición inicial o de frontera, la solución es única.

Es inmediato ver que en la naturaleza pueden existir fenómenos que no se pueden modelar solo con ecuaciones diferenciales ordinarias, por ejemplo, al analizar el flujo de gases en una tubería debemos considerar varias variables independientes como las tres coordenadas espaciales y una temporal. Mientras que también podemos tener más de una variable dependiente, como la temperatura, densidad de masa, energía, etc. El número de estas variables dependientes e independientes se reduce al asumir hipótesis extras en el modelo como, por ejemplo, la forma de la tubería, homogeneidad en la densidad y/o flujo del gas, etc.

Al modelar fenómenos donde existen más de una variable *independiente*, por ejemplo  $x$  y  $t$  y una variable *dependiente*, digamos  $u$ , debemos usar *derivadas parciales* de  $u$  respecto a las variables independientes para modelar razones de cambio.

## 2. Definición y clasificación de ecuaciones en derivadas parciales

Llamamos ecuación diferencial en derivadas parciales a una ecuación satisfecha por una o varias derivadas parciales de la variable dependiente; por ejemplo

$$a) \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad b) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad c) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad d) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = 0,$$

entre otras. Al igual que en el caso de ordinarias, para cada ecuación en derivadas parciales puede existir una familia de soluciones, pero al imponer condiciones iniciales o de frontera adecuadas al problema podemos tener solución única. Estas condiciones se imponen sobre un *dominio* adecuado al problema a estudiar, que son los valores de las variables independientes donde la ecuación diferencial parcial es válida.

**Ejercicio:** Observa que si no consideramos condiciones iniciales ni de frontera, las funciones  $u = e^{x+t}$  y  $v = e^{-3x+9t}$  son soluciones a la ecuación c), mientras que  $u = (x - ct)^2$  y  $v = \arctan(x - ct)$  son soluciones a la ecuación b). ¿Puedes encontrar al menos dos soluciones para cada ecuación restante?

Antes de estudiar cómo resolver este tipo de ecuaciones, vale la pena hacer algunas aclaraciones sobre nomenclaturas y clasificaciones.

- **Orden de una ecuación:** Diremos que una ecuación es de orden  $n$  si el mayor orden de derivación en  $u$  respecto a todas las variables independientes es  $n$ . Por ejemplo, la ecuación del inciso d) es de orden 2 mientras que la ecuación del inciso a) es de orden 1.
- **Grado de una ecuación:** Llamaremos grado de una ecuación a la potencia más alta a la que este elevado el término de mayor orden. Por ejemplo, todas las ecuaciones de los incisos a) al d) son de grado 1.

La clasificación usual para una ecuación en derivadas parciales es en base al grado y se acostumbra:

- **Ecuación lineal:** es aquella donde  $u$  y todas sus derivadas parciales tienen grado 1 y los coeficientes que acompañan a estas derivadas solo dependen de las variables independientes. Cualquier ecuación vista hasta ahora entra en esta clasificación.
- **Ecuación no lineal:** Aquella que no es lineal, por ejemplo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin(u), \quad \text{o} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = u.$$

Dentro de estas, encontramos a un tipo particular llamado:

–**Ecuaciones cuasilineales** que son ecuaciones de grado 1 (la potencia a la cual se eleva la derivada de orden mayor es 1) pero los términos con orden de derivación menor son términos no lineales en  $u$  (potencias, exponenciales, funciones trigonométricas, etc). Por ejemplo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin(u) \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Las ecuaciones con más aplicaciones en la ingeniería resultan ser las de primer y segundo orden de derivación. El caso de las ecuaciones en derivadas parciales lineales de segundo orden existe una clasificación más. Para ello considere la forma más general que puede tener una ecuación de este tipo. Asumamos que  $u$  sigue siendo la variable independiente pero las variables independientes se denotan por  $x_1$  y  $x_2$ :

$$a(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + b(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2} + c(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + F \left( x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = 0. \quad (1)$$

Para esta ecuación llamaremos *discriminante* de la ecuación diferencial parcial a  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Diremos que la ecuación (1) es una ecuación:

- **hiperbólica** si  $\Delta > 0$ ,
- **elíptica** si  $\Delta < 0$ , o
- **parabólica** si  $\Delta = 0$ ,

en todo el dominio de las variables independientes.

**Ejercicio:** Debido a su utilidad y amplio estudio, las siguientes ecuaciones tienen nombres propios:

1. *Ecuación de Onda:*  $c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$

2. *Ecuación de Calor:*  $k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$

3. *Ecuación de Laplace:*  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$

De acuerdo al determinante, ¿en qué clasificación entra cada una de ellas?

## 2.1. Ecuación de Onda

En esta subsección presentaremos la ecuación de onda como una ecuación en derivadas parciales usada para modelar el movimiento en una cuerda vibrante. Para ello pensemos que deseamos modelar una cuerda de longitud  $L$  atada en los extremos a la misma altura. Usaremos la variable  $u$  para denotar la altura respecto a la

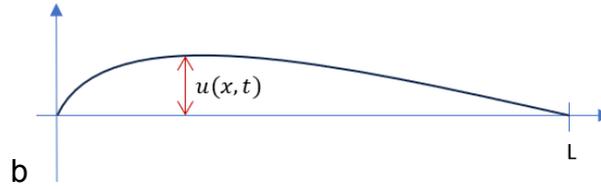


Figura 1 Esbozo de cuerda de longitud  $L$  sujeta en los extremos.

horizontal de equilibrio;  $x$  denotará la distancia sobre la horizontal de equilibrio y  $t$  la variable temporal. Es inmediato que las restricciones sobre las variables independientes serán

$$0 < x < L \quad \text{y} \quad t > 0, \quad (2)$$

pues nos interesa saber cómo es el desplazamiento vertical  $u(x, t)$  de la cuerda para tiempos posteriores al inicial. Además, al estar sujeta por los extremos, es inmediato que el desplazamiento vertical en los extremos es cero para todo tiempo, es decir,

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \text{para todo} \quad t > 0.$$

Como el principio básico que rige la dinámica de la cuerda vibrante es la segunda ley de Newton, necesitamos establecer condiciones iniciales en la posición  $u$  y en el momento  $\partial u / \partial t$ .

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x). \end{aligned} \quad \text{para todo} \quad 0 < x < L.$$

Ahora, ¿qué ecuación debe satisfacer  $u(x, t)$  cuando  $0 < x < L$  y  $t > 0$ ? Para simplificar el problema, ignoremos la fuerza gravitacional sobre la cuerda y pensemos que el desplazamiento vertical  $u(x, t)$  solo se ve afectado por la “curvatura” de la cuerda y que sigue la segunda ley de Newton. Es decir, la aceleración vertical  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  de un punto  $x$  al tiempo  $t$  sobre la cuerda es proporcional a la curvatura  $\kappa$  de la cuerda en ese instante, es decir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \propto \kappa(x, t) = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{(1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

Para simplificar esta expresión haremos una hipótesis extra: asumiremos que la cuerda es *homogeneamente extensible*, es decir, el cambio de la longitud de la curva respecto a la longitud horizontal de equilibrio es una constante, digamos  $\alpha > 0$ . En ecuaciones, esto se traduce en

$$\frac{\partial s(x, t)}{\partial x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} = \alpha,$$

donde  $s(x, t)$  representa la longitud de la cuerda al tiempo  $t$  en la posición  $x$ . Al sustituir esta hipótesis en (3) tenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

con  $k^2$  es una constante de proporcionalidad. Como  $u$  tiene unidades de distancia al igual que  $x$  y  $t$  es una variable temporal, concluimos que  $k^{-1}$  tiene unidades de velocidad. Es usual denotar a  $k^{-1}$  como  $c$ . Con todo lo anterior, el problema de la cuerda vibrante fija en los extremos y con una forma inicial  $f(x)$  se modela por el sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, & \text{para todo } t > 0, \text{ y } 0 < x < L, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), & \text{para todo } 0 < x < L, \\ u(x, 0) = f(x), & \text{para todo } 0 < x < L, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & \text{para todo } t > 0. \end{cases} \quad (4)$$

Esta ecuación se conoce como ecuación de onda con condiciones de Dirichlet homogéneas. Observa que en el sistema anterior muchas variantes pueden existir, por ejemplo

- Al asumir aceleraciones  $F(x, t)$  debidas a agentes externos, la ecuación se modificará a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x, t), \quad \text{para todo } t > 0, \text{ y } 0 < x < L.$$

Al término  $F$  se le conoce como termino forzante, o fuente.

- Si el desplazamiento vertical en algún extremo, por ejemplo el derecho, sigue una función  $f_d(t)$ , la condición de frontera en ese extremo debe cambiar a

$$u(L, t) = f_d(t), \quad \text{para todo } t > 0.$$

- Si alguno de los extremos se mantiene libre (por ejemplo un látigo), digamos el extremo izquierdo, la condición de frontera  $u(0, t) = 0$  debe cambiarse por

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \text{para todo } t > 0.$$

- Si se considera que la variable independiente  $x$  puede tomar cualquier valor real (dominios no acotados), entonces las condiciones de frontera no son necesarias pero se mantienen las condiciones iniciales. Las soluciones físicamente aceptables son aquellas cuya *energía* es finita.

La ecuación de onda se generaliza para casos donde existen más de una dimensión espacial. Por ejemplo, en dos y tres dimensiones espaciales, la ecuación de onda es:

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{y} \quad \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

respectivamente. Son ampliamente usadas para modelar la propagación de ondas en películas delgadas o en cuerpos tridimensionales. El término entre paréntesis se le conoce como el laplaciano y se denota por  $\Delta u$ ,  $\nabla \cdot \nabla u$  o en algunos casos por  $\nabla^2 u$ .

**Ejercicio:** Si en la deducción de la ecuación de Onda no asumes la condición de extensibilidad homogénea, ¿Qué ecuación resultante tendrás? ¿Esta es una ecuación lineal, cuasilineal o en general no lineal?

## 2.2. Ecuación de Calor

Al igual que en el caso de la ecuación de onda, la ecuación de calor se obtiene al modelar la evolución de la temperatura en una barra cilíndrica de longitud  $L$  y sección transversal  $A$ . Si  $x$  denota la longitud sobre el eje del cilindro y  $t$  el tiempo, la restricción del dominio es (2), como antes. .

Denotemos por  $u(x, t)$  y  $q(x, t)$  a la temperatura y el flujo de calor normal, respectivamente, en cualquier punto de la sección transversal  $A$  a una distancia  $x$  del extremo izquierdo de la barra al tiempo  $t$ . Asumamos que la barra está aislada térmicamente por su superficie lateral, es decir, la barra solo puede intercambiar calor en las tapas de los extremos.

Consideremos un pequeño cilindro contenido entre las secciones transversales a posiciones  $x$  y  $x + h$  donde  $h \ll 1$  tal que la temperatura en cualquier punto de este cilindro la podemos asumir constante. Por definición, el calor específico  $k$  de un material es la razón de cambio de la cantidad de calor  $Q$  por unidad de masa respecto a la temperatura. Entonces, si en este cilindro hay un cambio de una temperatura  $u(x, t)$  a una temperatura  $u(x, t + s)$  en un lapso de tiempo  $t$ , la cantidad de calor asociada a este cambio de temperatura se puede aproximar por

$$\begin{aligned} Q(x, t + s) - Q(x, t) &= mk(u(x, t + s) - u(x, t)), \\ &\sim \rho(x, t)Ah(u(x, t + s) - u(x, t)), \end{aligned} \quad (5)$$

donde  $m$  es la masa del cilindro. Por otro lado, el cambio de la cantidad de calor respecto al tiempo se debe al flujo de calor en las secciones transversales en las posiciones  $x$  y  $x + h$ . Más aún, si  $s \ll 1$  podemos aproximar a este término por:

$$Q(x, t + s) - Q(x, t) \sim -A[q(x + h, t) - q(x, t)]s.$$

Finalmente, la ley de Fourier para transferencia de calor establece que el flujo de calor  $q(x, t)$  es opuesto al gradiente de temperaturas  $\partial u / \partial x$  y la constante de proporcionalidad es la conductividad térmica  $c$ , implicando:

$$Q(x, t + s) - Q(x, t) \sim Ac \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x + h, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] s. \quad (6)$$

Igualando (5) y (6) y dividiendo por  $hs$  tendremos:

$$\kappa(x, t) \frac{1}{h} \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x + h, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] = \frac{u(x, t + s) - u(x, t)}{s},$$

con  $\kappa(x, t) = c/\rho(x, t)$ . Si finalmente hacemos tender  $s$  y  $h$  a cero, llegaremos a la ecuación de calor:

$$\kappa(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Para poder determinar la evolución de la temperatura en la barra, es necesario saber la distribución inicial de temperaturas; es decir,  $u(x, 0)$  para todo valor  $0 < x < L$ .

Al igual que en la ecuación de onda, podemos imponer diferentes condiciones de frontera y términos fuentes, por ejemplo:

- Si la temperatura en los extremos de izquierdo y derecho de la barra están prescritas por funciones  $T_i(t)$  y  $T_d(t)$ , respectivamente, entonces las condiciones de frontera serán

$$u(0, t) = T_i(t) \quad \text{y} \quad u(L, t) = T_d(t), \quad \text{para todo } t > 0.$$

- Si el flujo de la temperatura en los extremos de izquierdo y derecho de la barra está prescrito por funciones  $f_i(t)$  y  $f_d(t)$ , respectivamente, entonces las condiciones de frontera serán

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = f_i(t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = f_d(t), \quad \text{para todo } t > 0.$$

- Si la barra se esta calentado mediante una fuente  $g(x, t)$ , la ecuación de calor se modifica por

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x, y), \quad \text{para todo } 0 < x < L \text{ y } t > 0.$$

- La ecuación de calor se puede definir para dominios espaciales no acotados (barras infinitas). En este caso las condiciones de frontera no son necesarias, pero si las condiciones iniciales.

Al igual que en la ecuación de onda, la ecuación de calor (sin fuentes) se generaliza para dos y tres dimensiones espaciales como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa(x, y, t) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa(x, y, z, t) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0,$$

respectivamente. Estas ecuaciones modelan la difusión de calor en superficies planas y en objetos tridimensionales.

**Ejercicio:** Determina el conjunto de ecuación en derivadas parciales + condiciones de frontera + términos forzantes que modela la evolución de la temperatura en una barra cilíndrica de  $L$  longitud que se esta calentado con una fuente de calor igual a  $\sin(\pi x/L)$  y con una distribución inicial de temperatura  $e^{-x}$ . Además el extremo izquierdo tiene una temperatura constante  $T_0$  y el extremo derecho esta aislado térmicamente.

### 2.3. Ecuación de Laplace

La ecuación de Laplace es ampliamente usada en ingeniería para modelar deformaciones de membranas, distribución de potenciales electrostáticos, estados estacionarios de distribuciones de calor en objetos, etc. Es bien sabido que toda la teoría electromagnética clásica se rige por las cuatro leyes de Maxwell. Si nos restringimos al estudio de objetos electrostáticamente cargados, solo dos de las cuatro leyes son necesarias para describir completamente al fenómeno.

Si tenemos una distribución de carga  $\rho$ , la simple presencia de cargas distorsiona el espacio a través del campo eléctrico  $\vec{E}$  producido por ella. La relación entre el campo y la densidad de carga es la ley de Gauss

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x),$$

Por otro lado, este campo vectorial es conservativo en ausencia de campo magnético; esta es la Faraday.

$$\nabla \times \vec{E} = 0, \quad \text{o equivalentemente,} \quad \vec{E} = -\nabla\phi,$$

donde  $\phi$  es una función escalar. Al juntar ambas ecuaciones es inmediato que

$$-\nabla \cdot \nabla\phi = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x).$$

Dado que

$$\Delta\phi = \nabla \cdot \nabla\phi = \begin{cases} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}, & \text{si } n = 2, \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}, & \text{si } n = 3. \end{cases}$$

La ecuación que modela la distribución del potencial electrostático es:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \rho(x, y), \quad \text{si } n = 2,$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \rho(x, y, z), \quad \text{si } n = 3.$$

A esta ecuación se le conoce como la ecuación de Poisson o ecuación de Laplace no homogénea. Al caso particular con  $\rho = 0$  se le conoce como la ecuación de Laplace.

Observa que esta misma ecuación se puede deducir a partir de las ecuaciones de onda o calor en más de una dimensión cuando se buscan soluciones que sean independientes del tiempo. A este tipo de soluciones se les conoce como soluciones estacionarias. En el caso de la ecuación de calor, ellas representan la distribución de temperatura asintótica para tiempos muy grandes. En el caso de la ecuación de

onda, este tipo de soluciones representan posiciones promedio de la superficie u objeto deformado.

Dado que esta ecuación no involucra al tiempo, no existe condición inicial al problema, pero se deben aplicar condiciones de frontera cuando el dominio es acotado. En el caso de dominios no acotados, las soluciones físicamente aceptables son aquellas que tienen energía finita. Revisaremos más a detalle este problema cuando calculemos soluciones estacionarias al problema de difusión de temperatura.

### 3. El método de superposición para ecuaciones diferenciales lineales

En todos los problemas modelados por ecuaciones en derivadas parciales lineales la suma de dos soluciones sigue siendo solución a la ecuación diferencial. Es decir, si  $\mathcal{L}$  denota al operador diferencial asociado

$$\mathcal{L} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta, & \text{para la ecuación de calor,} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta, & \text{para la ecuación de onda,} \\ -\Delta, & \text{para la ecuación de Laplace.} \end{cases}$$

y  $u, v$  satisfacen que  $\mathcal{L}u = \mathcal{L}v = 0$ . Entonces la combinación lineal  $\lambda_1 u + \lambda_2 v$  también es solución pues satisface  $\mathcal{L}(\lambda_1 u + \lambda_2 v) = 0$ . Este efecto se llama *principio de superposición* y es ampliamente usado para encontrar soluciones a ecuaciones en derivadas parciales con condiciones de frontera, iniciales y términos forzantes basándonos en la estrategia: “divide y vencerás”. A continuación describimos esta idea.

Para fijar ideas, considera el problema de la difusión de calor en una barra de longitud  $L$  y con difusividad  $\kappa$  constante. Donde los extremos se mantienen a temperaturas constantes  $T_0$  a la izquierda y  $T_1$  a la derecha, y la distribución inicial de temperatura es  $T(x, 0) = f(x)$ . El sistema a resolver es

$$\begin{cases} \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, & \text{para todo } t > 0, \text{ y } 0 < x < L, \\ u(x, 0) = f(x), & \text{para todo } 0 < x < L, \\ u(0, t) = T_0, \quad u(L, t) = T_1, & \text{para todo } t > 0. \end{cases} \quad (7)$$

Pensemos que  $u$  es la suma de dos soluciones a la ecuación de calor, es decir  $u = u_p + u_h$ , donde  $u_p$  es una solución particular que “elimina” las condiciones de frontera.

$$\begin{cases} \kappa \frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} - \frac{\partial u_p}{\partial t} = 0, & \text{para todo } t > 0, \text{ y } 0 < x < L, \\ u_p(0, t) = T_0, \quad u_p(L, t) = T_1, & \text{para todo } t > 0. \end{cases}$$

Si asumimos que  $u_p$  es *independiente del tiempo*,  $\partial u_p / \partial t = 0$  y  $u_p$  debe ser solución a:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_p}{dx^2} = 0, & \text{para todo } 0 < x < L, \\ u_p(0) = T_0, \quad u_p(L) = T_1, & \text{para todo } t > 0. \end{cases} \quad (8)$$

La cual es una ordinaria clásica de segundo orden cuya solución es la siguiente recta

$$u_p = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{L}x.$$

Esta expresión y el sistema (7) dan un nuevo sistema para la variable  $u_h$ , pues

$$\begin{aligned} 0 &= \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 (u_p + u_h)}{\partial x^2} - \frac{\partial (u_p + u_h)}{\partial t} \\ &= \kappa \frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} - \frac{\partial u_p}{\partial t} + \kappa \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} - \frac{\partial u_h}{\partial t} \\ &= \kappa \frac{d^2 u_p}{dx^2} + \kappa \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} - \frac{\partial u_h}{\partial t} \\ &= \kappa \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} - \frac{\partial u_h}{\partial t}, \end{aligned}$$

es decir,  $u_p$  satisface la ecuación de calor. Además, las condiciones iniciales y de frontera para  $u_h$  se deducen a partir de las correspondientes para  $u$ , pues

$$\begin{aligned} T_0 &= u(0, t) = u_p(0) + u_h(0, t) = T_0 + u_h(0, t), \\ T_1 &= u(L, t) = u_p(L) + u_h(L, t) = T_1 + u_h(L, t), \\ f(x) &= u(x, 0) = u_p(x) + u_h(x, 0). \end{aligned}$$

De donde concluimos que  $u_h(0, t) = u_h(L, t) = 0$  para todo  $t > 0$  y  $u_h(x, 0) = f(x) - u_p(x)$ . Es decir, resolver (7) es equivalente a resolver

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} - \frac{\partial u_h}{\partial t} = 0, \quad \text{para todo } t > 0, \text{ y } 0 < x < L, \\ u_h(x, 0) = f(x) - T_0 - \frac{T_1 - T_0}{L}x, \quad \text{para todo } 0 < x < L, \\ u_h(0, t) = u_h(L, t) = 0, \quad \text{para todo } t > 0. \end{array} \right. \quad (9)$$

Esta ecuación, a diferencia de (7), satisface que las condiciones de frontera son cero (coloquialmente se les conoce como condiciones de frontera *homogéneas*); de allí que a la solución  $u_h$  se le conozca como solución al sistema homogéneo. En la siguiente sección nos dedicaremos a encontrar una solución a (9) por el método de separación de variables.

#### 4. El método de separación de variables

Este método se basa en la observación de que las tres ecuaciones básicas de segundo orden (sin considerar condiciones de frontera ni iniciales) aceptan soluciones de tipo exponencial, es decir

$$u(x, t) = e^{kx + \omega t},$$

para una elección adecuada de las constantes  $k$  y  $\omega$ . Estas soluciones tienen la particularidad de que  $u(x, t)$  es el producto de dos funciones, una que depende solamente

de  $x$ , en este caso  $X(x) = e^{kx}$ , y otra que depende solo de la variable temporal  $t$ , en este caso  $T(t) = e^{\omega t}$ .

**Ejercicio:** Encuentra los valores de  $k$  y  $\omega$  si (a)  $u(x, t)$  es solución a la ecuación de calor y (b)  $u(x, t)$  es solución a la ecuación de onda.

El método de separación de variables asume que una solución  $u(x, t)$  al problema en cuestión, digamos la ecuación de calor (y para fijar ideas pensemos en el sistema (9)), puede expresarse como producto de dos funciones una dependiente de la variable  $x$  y la otra dependiente en  $t$ . Es decir

$$u_h(x, t) = X(x)T(t), \quad (10)$$

No existe una razón para asumir esta hipótesis. En realidad, este método nos daría una familia  $\mathcal{F}$  de soluciones particulares *de variables separables*. La esperanza radica en que esta familia sea tan grande que la solución  $u_h$  que satisface todas las condiciones de frontera e iniciales impuestas al problema (9) sea una combinación lineal de todas las soluciones particulares en  $\mathcal{F}$ .

Estudiemos cuáles son las consecuencias de esta hipótesis de variables separables.

#### 4.1. Separación de la ecuación

Recordemos que nuestro objetivo es resolver el problema (9). Primero debemos escribir la ecuación de calor en términos de  $X$  y  $T$ . Por las reglas de derivación,

$$\frac{\partial u_p}{\partial x} = X'(x)T(t), \quad \frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} = X''(x)T(t), \quad \frac{\partial u_p}{\partial t} = X(x)T'(t).$$

De este modo, la ecuación de calor se traduce en

$$\kappa X''(x)T(t) - X(x)T'(t) = 0.$$

A primera vista, esta ecuación no da mucha información. Otra hipótesis extra que usa el método de separación de variables es en asumir que la solución  $u(x, t)$  es distinta de cero. Si esto pasa, entonces puedo dividir por la solución y reacomodar para obtener

$$\kappa \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)},$$

¿Qué puedes concluir de la ecuación anterior? Recuerda que las variables  $x$  y  $t$  son *independientes*.

Por la independencia de las variables  $x$  y  $t$ , esta ecuación es satisfecha solo en el caso donde cada miembro sea una ¡constante!, es decir

$$\kappa \frac{X''(x)}{X(x)} = c \quad \text{y} \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = c,$$

para algún valor de  $c$  real. Al reacomodar, obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias, en otras palabras, reducimos una ecuación en derivadas parciales al siguiente juego de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\kappa X''(x) = cX(x) \quad \text{y} \quad T'(t) = cT(t), \quad \text{con} \quad c \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

#### 4.2. Separación de las condiciones iniciales y de frontera

Las ecuaciones en (11) requieren algunas condiciones para determinar las constantes de integración al resolver cada una de ellas. ¿De dónde las obtendremos? Pues de las condiciones de frontera de la ecuación en derivadas parciales, ver (9).

##### 4.2.1. Variable espacial

Las condiciones de frontera en  $X(x)$  las obtenemos del siguiente razonamiento:

- Si  $u_h(0, t) = 0$  entonces  $X(0)T(t) = 0$  para todo  $t > 0$ . La única forma es que de satisfacer esto es si

$$X(0) = 0.$$

- Si  $u_h(L, t) = 0$  entonces  $X(L)T(t) = 0$  para todo  $t > 0$ . Al igual que en el inciso anterior,

$$X(L) = 0.$$

Con esto, la ecuación para  $X(x)$ , (con  $c$  aún libre) es

$$\begin{cases} \kappa X''(x) = cX(x), & \text{si } 0 < x < L, \\ X(0) = 0, \\ X(L) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Observa que NO existe una condición inicial al problema en  $T(t)$ .

**Importante:** Debemos notar que si las condiciones de frontera dependieran del tiempo, NO podríamos obtener condiciones de frontera para la variable  $X(x)$ . Esto implica que el método de variación de parámetros no es útil para resolver el problema y habría que buscar otra estrategia, como el método de características. Aquí se hace evidente que requerimos que el dominio de las variables independientes sea un dominio *rectangular* para que el método de separación de variables sea aplicable.

La solución a (12) varía de acuerdo con los valores del término  $c/\kappa$ .

- Si  $c/\kappa > 0$ , las soluciones son exponenciales, de hecho la solución más general a (12) es

$$X(x) = ae^{\sqrt{\frac{c}{\kappa}}x} + be^{-\sqrt{\frac{c}{\kappa}}x},$$

Al imponer las condiciones  $X(0) = X(L) = 0$  tendemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ e^{\sqrt{\frac{c}{\kappa}}L} & e^{-\sqrt{\frac{c}{\kappa}}L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como el determinante de la matriz no es cero concluimos que la única solución es  $a = b = 0$  y por tanto  $X(x) = 0$ . Este caso, no tenemos solución distinta a la trivial.

- Si  $c/\kappa = 0$ , la solución es una recta, de hecho la solución más general a (12) será:

$$X(x) = ax + b.$$

Al imponer las condiciones  $X(0) = X(L) = 0$ , sabemos que la única recta que pasa por el 0 en dos valores distintos de la abcisa es la recta  $X(x) = 0$ . Es decir no hay solución distinta a la trivial.

- Si  $c/\kappa < 0$ , las soluciones son senos y cosenos. La solución general a (12) es

$$X(x) = a \cos(\sqrt{\frac{-c}{\kappa}}x) + b \sin(\sqrt{\frac{-c}{\kappa}}x).$$

De la condición  $X(0) = 0$  obtenemos de manera inmediata que  $a = 0$ . Usando este resultado y la condición  $X(L) = 0$  llegamos a

$$b \sin(\sqrt{\frac{-c}{\kappa}}L) = 0,$$

como la función seno se anula en todos los múltiplos enteros de  $\pi$ , la relación anterior es cierta con  $b \neq 0$  siempre que

$$\sqrt{\frac{-c}{\kappa}}L = n\pi, \quad \text{con } n \text{ un número entero.}$$

Esto fuerza a que los valores admisibles de la constante  $c$  estén *cuantizados* por la siguiente relación

$$c = -\frac{\pi^2 \kappa}{L^2} n^2, \quad \text{para cualquier } n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Resumiendo, cualquier solución a (12) es de la forma

$$x(x) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{para cualquier } n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

#### 4.2.2. Variable temporal

Ahora sabemos que los valores admisibles para  $c$  son números negativos dados por la condición (13). Es momento de encontrar la solución para  $T$ . Recordemos que de ella sabemos la ecuación diferencial ordinaria, pero no la condición inicial. Por ello, la solución más general es

$$T(t) = d_n e^{ct} = d_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 \kappa}{L^2} t}. \quad (15)$$

#### 4.2.3. Familia de soluciones de variables separables

Juntando las ecuaciones (14) y (15) en la hipótesis de variables separables (10) tenemos:

$$u_{h_n} = f_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 \kappa}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad \text{para cualquier } n = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $f_n$  denota el producto de las constantes  $b_n y d_n$ . A la familia de todas estas soluciones les llamaremos familia de soluciones en variables separables. Observa que cada función  $u_{h_n}$  satisface las condiciones de frontera, pero no la condición inicial. De hecho, si  $f(x) - T_0 - \frac{T_1 - T_0}{L} x$  (ver (9)) es cualquier otra función distinta del seno, la condición inicial no es satisfecha.

¿Cómo construimos una solución al problema (9) usando esta familia de soluciones en variables separables?

#### 4.3. Series de Fourier

Fourier observó que la familia de soluciones en variables separables puede expandir cualquier función  $L$ -periódica cuando se escogen los valores de los coeficientes  $f_n$  para cada  $n = 0, 1, 2, \dots$ , adecuadamente. De hecho, como cada  $u_{h_n}$  satisface las condiciones de frontera *homogéneas*, cualquier suma de ellas (finita o infinita) seguirá cumpliéndolas. Por ello, Fourier propuso como solución a (9) a la serie

$$u_h(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{h_n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 \kappa}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right). \quad (16)$$

Al evaluar en  $t = 0$ , pediremos que  $u_h$  cumpla las condiciones iniciales, y por tanto, debe cumplirse que

$$f(x) - T_0 - \frac{T_1 - T_0}{L} x = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right). \quad (17)$$

es decir, la condición inicial debe darse como una suma de funciones periódicas *impares*! Aquí es donde Fourier recordó sus clases de Cálculo Integral, pues notó que

$$\frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = \frac{1}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{(n+m)\pi}{L} x\right) + \sin\left(\frac{(n-m)\pi}{L} x\right) dx. \quad (18)$$

Esta integral es cero siempre que  $n \neq m$ ; pero si  $n = m$  dicha integral es 1; en otras palabras

$$\frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m. \end{cases} \quad (19)$$

**Importante:** Esto nos recuerda a la ortogonalidad entre vectores de  $\mathbb{R}^n$  vía el producto punto clásico; solo que ahora las funciones trigonométricas son los “vectores” y el producto interno es la integral definida. De hecho, de cálculo vectorial (o álgebra lineal) sabemos que cualquier vector en  $\mathbb{R}^n$  es combinación lineal de los vectores de la base. En este caso, la relación (17) nos sugiere que  $f(x)$  es combinación lineal de los elementos de la familia de soluciones en variables separables.

Para determinar los valores de  $f_n$  en (17) multiplicamos por la función  $\frac{2}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$  e integramos de 0 a  $L$ . Si asumimos que podemos cambiar el símbolo de suma con la integral, tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{2}{L} \int_0^L \left( f(x) - T_0 - \frac{T_1 - T_0}{L}x \right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx &= \frac{2}{L} \int_0^L \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{L} \int_0^L f_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx. \end{aligned}$$

Como  $f_n$  es constante, por la relación (19) concluimos que casi todos los términos de la suma son cero (de hecho cuando  $n \neq m$ ) y sólo uno de los sumandos es distinto de cero (cuando  $n = m$ ). Por ello,

$$f_m = \frac{2}{L} \int_0^L \left( f(x) - T_0 - \frac{T_1 - T_0}{L}x \right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx. \quad (20)$$

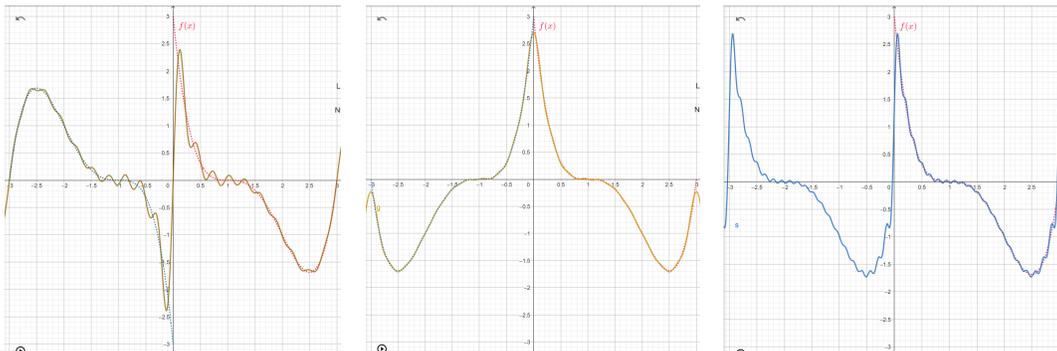


Figura 2 Se muestran la suma de los primeros 20 términos del desarrollo de Fourier para la función  $f(x) = (x - 1)^4 - 2(x - 1)^3$  (línea punteada roja). A la izquierda se muestra el desarrollo impar de la función, al centro el desarrollo par y a la derecha el desarrollo sin considerar simetría (desarrollo completo). En las imágenes izquierda y central se muestran las extensiones impar y par para la misma función con una línea punteada azul.

En el siguiente applet de geogebra encontrarás el desarrollo de Fourier para una función dada que tu puedes elegir. Además puedes elegir si el desarrollo es impar (usa desarrollo en senos), par (usa desarrollo en cosenos) o simple (usando ambas funciones trigonométricas). En cada caso se muestra la extensión par o impar de la función a desarrollar para compararla con su serie de Fourier.

<https://www.geogebra.org/calculator/kttpka6a>

En conclusión, si  $u_h(x, t)$  está expresada en series como en (16) y la condición inicial satisface (17) con los coeficientes  $f_n$  dados por (20), entonces  $u_h(x, t)$  es la solución a (9). Más aún, ya podemos determinar la solución  $u(x, t)$  al sistema (7), pues

$$u(x, t) = u_p(x) + u_h(x, t) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{L}x + \sum_{m=0}^{\infty} f_m e^{-\frac{m^2 \pi^2 \kappa}{L^2} t} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right),$$

donde los coeficientes  $f_m$  están determinados por (20). En la siguiente liga encontrarás un applet de Geogebra donde encontrarás la representación gráfica de esta solución. Tú puedes elegir los valores de las temperaturas  $T_0$  y  $T_1$ , así como la condición inicial  $f(x)$ , esta se muestra con una línea punteada roja. Además, en color amarillo mostramos la distribución de temperaturas estacionaria  $u_p(x)$ . En esta simulación puedes modificar el número  $N$  de sumandos a considerar en la serie de Fourier, ya que numéricamente no puedes hacer una suma infinita, pero entre más términos tomemos, mejor será la aproximación. De igual forma puedes variar la constante de difusión.

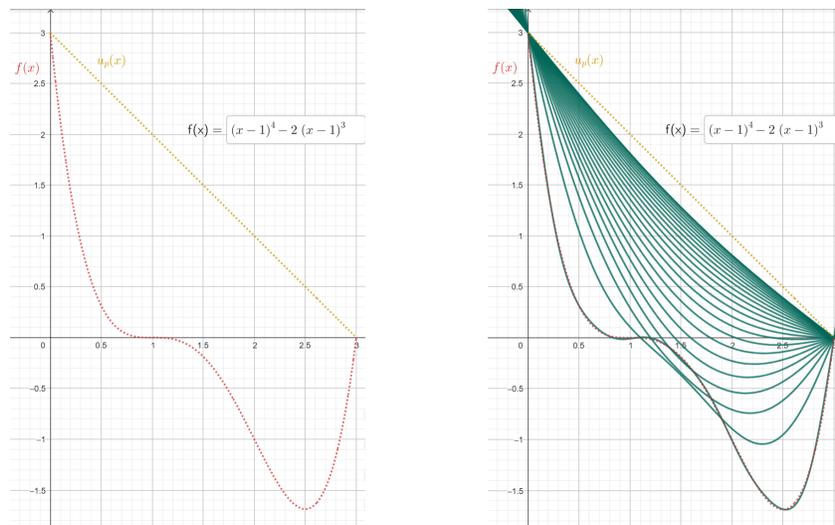


Figura 3 A la izquierda distribución inicial de temperatura  $f(x) = (x - 1)^4 - 2(x - 1)^3$  al problema (7) con condiciones de frontera  $T_0 = 3$  y  $T_1 = 0$ ; también se muestra el estado estacionario  $u_p(x)$ . A la derecha se muestra la evolución temporal de la distribución inicial de temperatura para un  $\Delta t = 0.05s$  en color verde.

<https://www.geogebra.org/calculator/yajqwjta>

**Ejercicio:** Usando el applet anterior, ¿Cómo afecta el término  $\kappa$  a la rapidez de convergencia de la solución  $u(x, t)$  hacia el estado estacionario  $u_p(x)$ ? ¿Cómo afectan las temperaturas en los extremos para la distribución estacionaria de la temperatura.

**Importante:** que la expansión de una función, en este caso  $f(x) - T_0 - \frac{T_1 - T_0}{L}x$ , por medio de funciones impares como en (17) garantiza la igualdad entre la función y la serie SÓLO en el intervalo  $(0, L)$ , y por construcción la serie del lado derecho de (17) es impar, la gráfica completa, para todo  $x$  real, de esta serie es una función impar. A esta serie se le conoce como la representación *impar* de una función.

**Ejercicio** Encuentra la solución  $u(x, t)$  al siguiente problema empleando todos los pasos vistos en las páginas anteriores.

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \text{para todo } t > 0, \text{ y } 0 < x < L, \\ u(x, 0) = f(x), \quad \text{para todo } 0 < x < L, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = h_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(L, t) = h_1, \quad \text{para todo } t > 0, \end{array} \right. \quad (21)$$

con  $h_0$  y  $h_1$  constantes. En este caso requerirás una expansión *par* para las condiciones iniciales, y como Fourier, deberás recordar una identidad similar a la usada en (18).

**Ejemplo:** Encuentra y resuelve el modelo en ecuaciones diferenciales parciales para la altura vertical de una cuerda vibrante de longitud  $L$  sujeta en los extremos a una altura  $u(0, t) = u_0$  y  $u(L, t) = u_1$  con condiciones iniciales dadas por  $u(x, 0) = f(x)$  y  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ . En este ejercicio seremos más breves citando cada uno de los pasos anteriores:

- el sistema a resolver es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \text{para todo } t > 0, \text{ y } 0 < x < L, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad \text{para todo } 0 < x < L, \\ u(x, 0) = f(x), \quad \text{para todo } 0 < x < L, \\ u(0, t) = u_0, \quad u(L, t) = u_1, \quad \text{para todo } t > 0. \end{array} \right. \quad (22)$$

- Proponemos a la solución  $u(x, t) = u_p(x) + u_h(x, t)$  donde  $u_p(x)$  es una solución estacionaria y  $u_h(x, t)$  es una solución a la ecuación de onda con condiciones de frontera homogéneas. Al igual que en (8), obtenemos que

$$u_p(x) = u_0 + \frac{u_1 - u_0}{L}x.$$

Al sustituir  $u(x, t) = u_0 + \frac{u_1 - u_0}{L}x + u_h(x, t)$  en (22), el sistema para  $u_h(x, t)$  es

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} = 0, \quad \text{para todo } t > 0, \text{ y } 0 < x < L, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad \text{para todo } 0 < x < L, \\ u(x, 0) = f(x) - u_0 - \frac{u_1 - u_0}{L}x, \quad \text{para todo } 0 < x < L, \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad \text{para todo } t > 0. \end{array} \right. \quad (23)$$

- **Hipótesis de separación de variables:** Asumimos que la solución  $u_h(x, t) = X(x)T(t)$  y sustituimos en (23).

$$\left\{ \begin{array}{l} X(x)''T(t) - \frac{1}{c^2}X(x)T''(t) = 0, \quad \text{para todo } t > 0, \text{ y } 0 < x < L, \\ X(0)T(t) = 0, \quad X(L)T(t) = 0, \quad \text{para todo } t > 0. \end{array} \right.$$

Por el momento no se considera a las condiciones iniciales pues se impondrán al final. Ahora asumimos  $u_h = X(x)T(t) \neq 0$  y dividimos la ecuación diferencial por  $u_h$ . Después de recomodar se llega a:

$$c^2 \frac{X(x)''}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}, \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} X''(x) = \frac{k}{c^2}X(x), \\ T''(t) = kT(t), \end{array} \right. \quad \text{para algunos } c \in \mathbb{R}.$$

Además, las condiciones de frontera al problema implican las siguientes condiciones de frontera en la ordinaria para  $X(x)$ :

$$X(0) = 0 \quad \text{y} \quad X(L) = 0.$$

- **Soluciones a  $X(x)$ :** La ordinaria a resolver es:

$$\left\{ \begin{array}{l} X''(x) = \frac{k}{c^2}X(x), \quad \text{con } 0 < x < L, \\ X(0) = X(L) = 0. \end{array} \right.$$

Analizaremos de acuerdo a los valores de  $k$ .

- Si  $k > 0$ , la solución general es  $X(x) = ae^{\frac{\sqrt{k}}{c}x} + be^{-\frac{\sqrt{k}}{c}x}$  donde  $a$  y  $b$  satisfacen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\frac{\sqrt{k}}{c}L} & e^{-\frac{\sqrt{k}}{c}L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como el determinante de la matriz no se anula, concluimos que  $a = b = 0$  implicando que  $u_h = 0$  es la única solución posible en este caso.

- Si  $k = 0$ ,  $X(x) = a + bx$  (una recta), donde  $a$  y  $b$  son tales que  $X$  se anula en 0 y en  $L$ . Por tanto,  $X(x) = 0$  y no da mayor contribución.
- Si  $k < 0$ , la solución general es  $X(x) = b \sin\left(\frac{\sqrt{-k}}{c}x\right)$ . La condición de frontera es satisfecha sólo si la "frecuencia"

$$\frac{\sqrt{-k}}{c} = \frac{n\pi}{L}, \quad \text{para todo } n \text{ entero.}$$

- **Soluciones a  $T(t)$ :** Como  $X(x) \neq 0$  para  $k < 0$  con  $k = -n^2\pi^2c^2/L^2$ , la solución para  $T(t)$  es de la forma

$$T(t) = d \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + \ell \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right).$$

- **Solución general:** Al juntar las expresiones de  $X(x)$  con  $T(t)$  y sumar sobre el índice  $n$  en los naturales (en virtud del principio de superposición), obtenemos la expresión general para  $u_h(x, t)$ ,

$$u_h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (24)$$

donde las constantes  $a_n$  y  $b_n$  se determinarán por las condiciones iniciales. De hecho, al evaluar en  $t = 0$ , es inmediato que:

$$f(x) - u_0 - \frac{u_1 - u_0}{L}x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

mientras que al derivar (24) respecto a  $t$  y evaluar en  $t = 0$  obtendremos:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

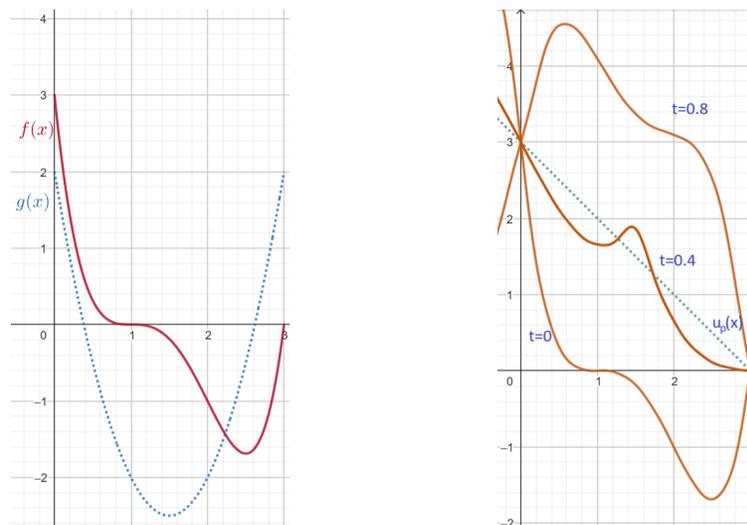


Figura 4 La imagen a la derecha muestra las condiciones iniciales y de frontera para el sistema (22) con posición inicial  $f(x) = (x - 1)^4 - 2(x - 1)^3$  (línea roja), velocidad  $g(x) = 2(x - 2)^2 + 2(x - 2) - 2$  (línea azul punteada),  $u_0 = 3$  y  $u_1 = 0$ . A la izquierda se muestran la posición de la cuerda vibrante en los tiempos  $t = 0, 0.4$  y  $0.8$  segundos. Además mostramos es estado de equilibrio  $u_p(x)$  alrededor del cual se presentan las oscilaciones.

Es decir, los coeficientes  $a_n$  son los coeficientes de una expansión impar de la función  $f(x) - u_0 - \frac{u_1 - u_0}{L}x$  mientras que los coeficientes  $b_n$  son los coeficientes de una expansión impar de  $g(x)$  pero divididos por  $n\pi c/L$ . Por tanto, la expresión (24) es solución al sistema (23) cuando los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  son:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left( f(x) - u_0 - \frac{u_1 - u_0}{L}x \right) \sin \left( \frac{n\pi}{L}x \right) dx,$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \left( \frac{n\pi}{L}x \right) dx.$$

Finalmente, la solución general a (22) es la suma de  $u_n(x, t)$  con la solución estacionaria  $u_p(x)$ . En el siguiente applet de Geogebra encontrarás una simulación de la solución donde puedes variar las condiciones iniciales y de frontera, velocidad de la onda y longitud de la cuerda, así como el grado de aproximación  $N$  (recuerda que al simular no podemos usar la suma infinita, pero sí hasta un valor  $N$  grande).

<https://www.geogebra.org/calculator/urzw5gu4>

**Ejercicio:** Resuelve con el método de separación de variables, el siguiente problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & \text{para } 0 < x < L \text{ y } 0 < y < H, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, H) = 0, & \text{para } 0 < x < L, \\ u(L, y) = T_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = E, & \text{para } 0 < y < H. \end{cases}$$

## Bibliografía

1. Baker, G. R. (2016). Differential equations as models in science and engineering. *World Scientific Publishing Company*.
2. Nagle, R. K., Saff, E. B., & Snider, A. D. (2000). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. *Pearson Educación*.
3. Spiegel, M. R. (1981). Applied differential equations. *Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall*.
4. Salsa, S. (2015). Partial differential equations in action (Vol. 1). *Milan: Springer*.