INTEGRABILIDAD Y SUMAS DE RIEMANN

En clase hemos discutido el concepto de integrabilidad de una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y su relación con las sumas superiores $U(P,f)$ y las sumas sumas inferiores $L(P,f)$ para una partición P dada. También hemos estimado el valor del área bajo la curva $f_1(x) = \gamma$, $f_2(x) = mx$ y $f_3(x) = x^2$ en el intervalo $[a,b]$ donde $a > 0$ usando que en dicho intervalo la función es monótona, de hecho, la cuenta se realizó para una partición equidistante en el caso de f_2 y de f_3, mientras que en el caso de f_1, este resultado era independiente del tipo de partición. Es natural cuestionarse si el resultado obtenido para f_2 y f_3 concuerda con la definición correcta de integrabilidad independientemente de que se haya obtenido vía una partición muy específica (partición equidistante). Esta pregunta tiene respuesta afirmativa por medio del teorema 4, pero para llegar a ello tenemos que preparar el camino.

1. Definiciones

Sea $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ función acotada, diremos que:

1. $P \subset [a,b]$ es partición de $[a,b]$ si y sólo si $P = \{x_0,\, x_1,\, \ldots x_n\}$ donde $x_0 = a$, $x_n = b$ y $x_i < x_{i+1}$ para todo $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1$.
2. $\Delta P := \max\{x_i - x_{i-1} | i = 1,\, \ldots,\, n\}$ es el ancho de la partición P.
3. $P' \in \mathcal{P}[a,b]$ es refinamiento de la partición $P \in \mathcal{P}[a,b]$ si para toda $x \in P$ se tiene $x \in P'$.
4. $\mathcal{P}[a,b]$ es el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a,b]$.
5. Las sumas por arriba y las sumas por abajo de f dada P se definen como
$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{\xi\in[x_{i-1},x_i]} f(\xi)(x_i - x_{i-1}), \qquad L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{\xi\in[x_{i-1},x_i]} f(\xi)(x_i - x_{i-1}),$$
respectivamente.
6. El término $S(P,f)$ es una suma de Riemann si y sólo si
$$S(P,f) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \text{con} \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \forall\, i = 1,\, \ldots,\, n$$
7. La integral superior e inferior de f estan dadas por:
$$\bar{I} = \sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]} L(P,f), \qquad \underline{I} = \inf_{P\in\mathcal{P}[a,b]} U(P,f).$$
respectivamente. La existencia de $\bar{I}$ y $\underline{I}$ se prueba vía la proposición 3.
8. f es integrable si y sólo si $\bar{I} = \underline{I}$.
9. f es absolutamente continua si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ si $|x - y| < \delta$ y $x, y \in [a,b]$.
   NOTA: continuidad absoluta implica que la δ no depende de los valores de x o de y pero si puede depender de ϵ. Por ello el adjetivo de absoluta, pues la delta es una única para todo valor de $x \in [a,b]$.
10. La función f es monótona si es creciente o decreciente.
11. f es continua por pedazos si tiene un número finito de discontinuidades

2. Resultados sobre particiones

En la siguiente liste de resultados asumiremos siempre que $P \in \mathcal{P}[a,b]$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada.

Proposición 1. *Las sumas por arriba y por abajo de f dada la partición P existen y satisfacen que $L(P,f) \leq U(P,f)$.*

Proposición 2. *Sea $P' \in \mathcal{P}[a,b]$ refinamiento de P entonces $L(P,f) \leq L(P',f) \leq U(P',f) \leq U(P,f)$.*

NOTA: La siguiente proposición muestra que $\{L(Q,f) \,|\, Q \in \mathcal{P}[a,b]\}$ y $\{U(P,f) \,|\, P \in \mathcal{P}[a,b]\}$ son conjuntos acotados superior e inferiormente respectivamente.

Proposición 3. *Sea $Q \in \mathcal{P}[a,b]$ entonces $L(Q,f) \leq U(P,f)$.*

El siguiente teorema muestra la analogía entre la definición de continuidad de una función usando ϵ y δ y la definición de integrabilidad usando sumas superiores e inferiores

Teorema 1. *f es integrable si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $P \in \mathcal{P}[a, b]$ tal que $U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$.*

la caracterización anterior de integrabilidad permite mostrar fácilmente que funciones del tipo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{I} \cap [a, b] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [a, b], \end{cases} \tag{1}$$

no son integrables pues podemos encontrar $\epsilon > 0$, *e.g.* $\epsilon = (b - a)/2$ tal que para toda partición $P \in \mathcal{P}[a, b]$, el término $U(P, f) - L(P, f) > \epsilon$.

3. Integrabilidad de funciones continuas por pedazos y/o monotonas

Observe que para P partición y f función acotada, se tiene que

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} \left[\sup_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi) - \inf_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi) \right] (x_i - x_{i-1}), \tag{2}$$

El lado derecho en (2) puede no hacerse menor tan pequeño como uno lo desee al refinar la partición ya que los términos $\mathscr{L}(i) := \left[\sup_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi) - \inf_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi)\right]$ para $i = 1, \ldots, n$ pueden presentar dos fenómenos interesantes:

- los términos $\mathscr{L}(i)$ no están acotados inferiormente por un número positivo $\alpha > 0$ que no cambia al refinar la partición; un ejemplo de ello es cuando f tomar valores distintos sobre dos conjuntos densos en [a,b], como es el caso de la función dada por (1).
- los términos $\mathscr{L}(i)$ no están acotados superiormente al refinar la partición por la presencia de alguna singularidad, una forma de controlar este problema es vía la continuidad absoluta del integrando.

El siguiente ejercicio da indicios de que una función continua en un intervalo cerrado es absolutamente continua, de hecho al parecer la perdida de la continuidad absoluta esta ligada al crecimiento o decrecimiento más alla de toda cota.

Ejercicio: pruebe las siguientes afirmaciones:

- $f(x) = x^2$ es absolutamente continua en $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
- $f(x) = x^2$ no es absolutamente continua en $\mathbb{R}$.
- $f(x) = 1/x$ es absolutamente continua en $[a, b] \subset \mathbb{R}$ cuando $a > 0$ o $b < 0$.
- $f(x) = 1/x$ no es absolutamente continua en $(0, b] \subset \mathbb{R}$, con $b > 0$.

Proposición 4. *Una función continua en un intervalo cerrado es absolutamente continua.*

Los teoremas 2 y 3 y corolario 1 son la base para inferir la existencia de la integral de la mayoría de las funciones integrables en el sentido dado anteriormente (Riemann integrables).

Teorema 2. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua entonces es integrable.*

Corolario 1. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua por pedazos entonces es integrable.*

Teorema 3. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es monótona entonces es integrable.*

Lema 1. *Sea P partición y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Si $S(P, f)$ es una suma de Riemann entonces $L(P, f) \leq S(P, f) \leq U(P, f)$.*

El siguiente teorema recuerda la equivalencia entre la continuidad de funciones vía ϵ y δ y la continuidad de funciones vía sucesiones.

Teorema 4. *Sea* $P \in \mathcal{P}[a,b]$ *y* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *acotada. Los siguientes son equivalentes:*

1. f *es integrable.*
2. *Existe un único* $I \in \mathbb{R}$ *tal que para toda sucesión de particiones* (P_n) *tal que* $\Delta P_n \to 0$ *cuando* $n \to \infty$ *se tiene que* $\lim S(P_n, f) = I$ *para cada elección de valores intermedios* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Demostración.

1 ⇒ 2 : Sea $\epsilon > 0$ y $(P_n) \subset \mathcal{P}[a,b]$ una sucesión de particiones tal que $\Delta P_n \to 0$. Por ser f integrable y la definición de $\bar{I}$, existe una partición $P = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_\ell = b\}$ tal que

$$U(P,f) - L(P,f) < \epsilon/3 \quad \text{y} \quad U(P,f) < \bar{I} + \epsilon/3 \tag{3}$$

Escogeremos $I = \bar{I}$. Como $\lim \Delta P_n = 0$ podemos escoger n suficientemente grande tal que la partición P_n satisfaga que $\Delta P_n < \epsilon/(9M\ell)$ donde M es cota de f en $[a,b]$ y existen $m_1, m_2, \ldots m_{\ell-1} \in \mathbb{N}$ tal que

$$P_n = \{y_0 = a < y_1 < \ldots < y_{m_1} < \ldots < y_{m_2} < \ldots < y_{m_\ell} = y_n = b \,|\, y_{m_i - 1} < x_i \le y_{m_i}, \ \forall i = 1, \ldots, \ell\}$$

Para esta partición P_n definamos una suma de Riemann $S(P_n, f)$, entonces por desigualdad del triángulo y la segunda relación en (3) tenemos

$$|I - S(P_n,f)| \le |I - U(P,f)| + |U(P,f) - S(P_n,f)| \le \frac{\epsilon}{3} + |U(P,f) - S(P_n,f)| \tag{4}$$

Para sobreestimar el úlimo término de la derecha en la ecuación anterior usaremos la siguiente identidad cuya demostración se deja al lector

$$S(P_n,f) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=0}^{\ell-1} \sum_{j=1}^{m_{i+1}-m_i-1} f(\xi_{m_i+j})(y_{m_i+j} - y_{m_i+j-1}) + \sum_{i=1}^{\ell} f(\xi_{m_i})(y_{m_i} - y_{m_i-1}) \tag{5}$$

Dado que $[y_{m_i+j-1}, y_{m_i+j}] \subset [x_i, x_{i+1}]$ para $j = 1, \ldots, m_{i+1} - m_i - 1$ tenemos

$$f(\xi) \ge \inf_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} f(\xi) \qquad \forall \xi \in [y_{m_i+j-1}, y_{m_i+j}] \ \text{ y } \ j = 1, \ldots, m_{i+1} - m_i - 1$$

Así el primer sumando en (5) se acota por debajo por

$$S(P_n,f) \ge \sum_{i=0}^{\ell-1} \inf_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} f(\xi) \left[\sum_{j=1}^{m_{i+1}-m_i-1} (y_{m_i+j} - y_{m_i+j-1}) \right] + \sum_{i=1}^{\ell} f(\xi_{m_i})(y_{m_i} - y_{m_i-1})$$

El término entre corchetes es una suma telescópica que se reduce a

$$S(P_n,f) \ge \sum_{i=0}^{\ell-1} \inf_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} f(\xi) \left[(y_{m_{i+1}-1} - y_{m_i}) \right] + \sum_{i=1}^{\ell} f(\xi_{m_i})(y_{m_i} - y_{m_i-1})$$

corriendo los índices para iniciar en $i = 1$, tenemos

$$S(P_n,f) \ge \sum_{i=1}^{\ell} \inf_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi) \left[(y_{m_i-1} - y_{m_{i-1}}) \right] + \sum_{i=1}^{\ell} f(\xi_{m_i})(y_{m_i} - y_{m_i-1})$$

El término en rojo es casi $L(P,f)$, así que sumando y restando lo necesario tendemos

$$S(P_n,f) \geq L(P,f) - \sum_{i=1}^{\ell} \inf_{\xi\in[x_{i-1},x_i]} f(\xi)(y_{m_{i-1}} - x_{i-1} + x_i - y_{m_i-1}) + \sum_{i=1}^{\ell} f(\xi_{m_i})(y_{m_i} - y_{m_i-1})$$

De este modo tendremos

$$\begin{aligned} |U(P,f) - S(P_n,f)| \leq & |U(P,f) - L(P,f)| + \left|\sum_{i=1}^{\ell} f(\xi_{m_i})(y_{m_i} - y_{m_i-1})\right| \\ & + \left|\sum_{i=1}^{\ell} \inf_{\xi\in[x_{i-1},x_i]} f(\xi)[(y_{m_{i-1}} - x_{i-1}) + (x_i - y_{m_i-1})]\right| \end{aligned} \tag{6}$$

Por ser M cota de f en $[a,b]$ tenemos que los términos en rojo de la ecuación (6) son menores a M, mientras que por definición de ΔP_n tenemos que $y_{m_i} - y_{m_i-1} \leq \Delta P_n$ y

$$y_{m_{i-1}} - x_{i-1} \leq y_{m_{i-1}} - y_{m_{i-1}-1} \leq \Delta P_n, \quad \text{y} \quad x_i - y_{m_i-1} \leq y_{m_i} - y_{m_i-1} \leq \Delta P_n$$

es decir los términos en azul en la ecuación (6) están cacotados por ΔP_n, así

$$|U(P,f) - S(P_n,f)| \leq |U(P,f) - L(P,f)| + 3M\ell\Delta P_n < \frac{2}{3}\epsilon \tag{7}$$

Usando (7) en (4) concluimos que

$$|I - S(P_n,f)| \leq \frac{\epsilon}{3} + |U(P,f) - S(P_n,f)| < \epsilon$$

Por lo tanto $\lim S(P_n,f) = I$.

<u>2 ⇒ 1</u> : Sean $\epsilon > 0$, $I \in \mathbb{R}$ y $(P_n) \subset \mathcal{P}[a,b]$ tal que $\lim \Delta P_n = 0$, defina la sucesión de sumas de Riemann $(S(P_n,f))$, por hipotesis sabemos que $I = \lim S(P_n,f)$ para cualquier elección de los puntos intermedios. Observe que para cada partición P_n y todo intervalo $[x_{i-1},x_i]$ para $i = 1, \ldots, n$ existen $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1},x_i]$ tales que

$$\sup_{\xi\in[x_{i-1},x_i]} f(\xi) - \frac{\epsilon}{4(b-a)} < f(\xi_i), \quad \text{y} \quad \inf_{\xi\in[x_{i-1},x_i]} f(\xi) + \frac{\epsilon}{4(b-a)} > f(\eta_i)$$

Multiplicando ambas desigualdades anteriores por $(x_i - x_{i-1})$ y sumando sobre en índice i tendremos

$$U(P_n,f) - \frac{\epsilon}{4} = \sum_{i=1}^{n} \sup_{\xi\in[x_{i-1},x_i]} f(\xi)(x_i - x_{i-1}) - \frac{\epsilon}{4(b-a)} \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) := \bar{S}(P_n,f)$$

y

$$L(P_n,f) + \frac{\epsilon}{4} = \sum_{i=1}^{n} \inf_{\xi\in[x_{i-1},x_i]} f(\xi)(x_i - x_{i-1}) + \frac{\epsilon}{4(b-a)} \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) > \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)(x_i - x_{i-1}) := \underline{S}(P_n,f)$$

En resumen

$$U(P_n,f) < \bar{S}(P_n,f) + \frac{\epsilon}{4} \quad \text{y} \quad L(P_n,f) > \underline{S}(P_n,f) - \frac{\epsilon}{4}$$

Restando de manera apropiada estas dos desigualdes tendremos:

$$U(P_n,f) - L(P_n,f) < \bar{S}(P_n,f) - \underline{S}(P_n,f) + \frac{\epsilon}{2}$$

Como $I = \lim S(P_n, f)$ independientemente del punto intermedio, existen $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$|I - \bar{S}(P_n, f)| < \frac{\epsilon}{4} \quad \text{si} \;\; n \geq N_1$$
$$|I - \underline{S}(P_n, f)| < \frac{\epsilon}{4} \quad \text{si} \;\; n \geq N_2$$

Así, escogiendo $n \geq \text{máx}\{N_1,\ N_2\}$ tendremos

$$\begin{aligned} U(P_n, f) - L(P_n, f) &< |\bar{S}(P_n, f) - \underline{S}(P_n, f)| + \frac{\epsilon}{2} \\ &< |I - \bar{S}(P_n, f)| + |I - \underline{S}(P_n, f)| + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Con esto terminamos la prueba ya que para cada $\epsilon > 0$ encontramos $n \in \mathbb{N}$ es decir una partición P_n tal que $U(P_n, f) - L(P_n, f) < \epsilon$ y por el teorema 1 concluimos que f es integrable. $\square$