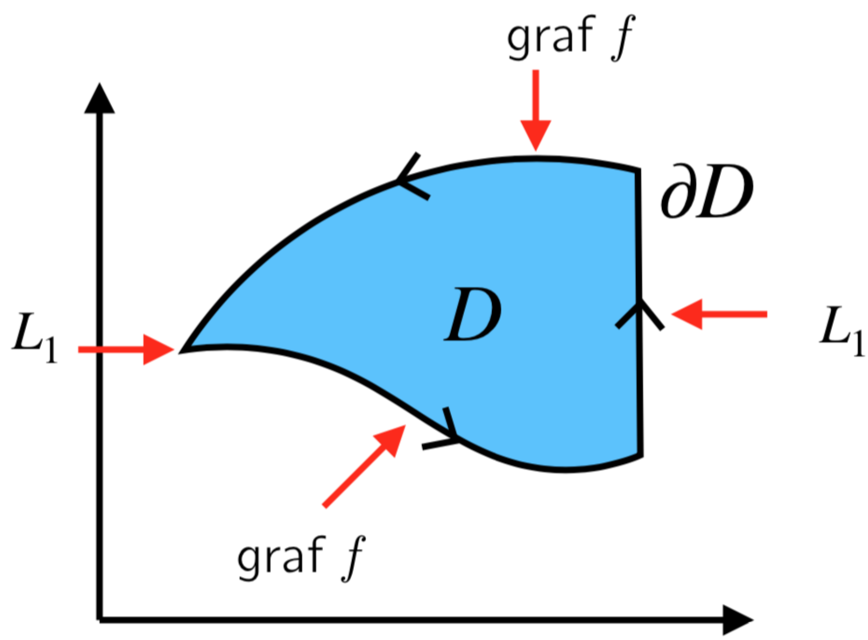
Cálculo Diferencial e Integral IV

Teoremas integrales

En este pequeño documento haremos daremos las pruebas de los tres teoremas integrales fundamentales en calculo vectorial.

Teorema 1 (Green)**.** *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ conjunto Jordan medible de tipo III, tal que ∂D es curva C^1. Suponga P, $Q : D \to \mathbb{R}$ con derivadas continuas, entonces*

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy$$



Demostración. Como D es de tipo III entonces $D = \{(x, y) \,|\, y \in [f(x), g(x)],\ x \in [a, b]\}$ para algunas funciones reales f, g y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces por integrales iteradas tenemos

$$\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dydx = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dydx = \int_a^b P(x, g(x))dx - \int_a^b P(x, f(x))dx \tag{1}$$

esta última linea se debe a que en la integral respecto a y, la variable x se considera fija (como un parámetro) y por tanto la derivada parcial de P respecto a y se considera como derivada total, el resto es consecuencia del teorema fundamental del Cálculo.

Dada la descripción del conjunto D sabemos que $\partial D = \text{graf}\, f \cup L_1 \cup \text{graf}\, g \cup L_2$ donde cada L_1 puede es el punto $\{(b, f(b))\}$ o el segmento vertical $\{(b, y) \,|\, y \in [f(b), g(b)]\}$; análogamente, L_2 es el punto $\{(a, f(a))\}$ o el segmento vertical $\{(a, y) \,|\, y \in [f(a), g(a)]\}$. Como ∂D esta orientada positivamente y la integral de línea distribuye sobre uniones de curvas, vemos que

$$\int_{\partial D} Pdx = \int_{\text{graf}\, f} Pdx + \int_{\text{graf}\, g} Pdx + \int_{L_1 \cup L_2} Pdx \tag{2}$$

Observe la última integral de linea es cero, esto se sigue inmediatamente si tanto L_1 como L_2 son un punto. En el caso en que alguno de los dos son segmentos verticales tenemos que la parametrización de estos es de la forma $\gamma(t) = (b, (1-t)f(b) + tg(b))$ para L_1 y $\gamma(t) = (a, tf(a) + (1-t)g(a))$ para L_2 con $t \in [0, 1]$. Es inmediato que $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (0, g(b) - f(b))$ para L_1 y $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (0, f(a) - g(a))$ y con ello

$$\int_{L_1} Pdx = \int_0^1 P(\gamma(t))x'(t)dt = 0 \quad \text{y} \quad \int_{L_2} Pdx = \int_0^1 P(\gamma(t))x'(t)dt = 0$$

Por otro lado, la integral sobre graf f podemos usar la parametrización $\gamma(t) = (t, f(t))$ para $t \in [a, b]$, de modo que $\gamma'(t) = (1, f'(t))$ y

$$\int_{\text{graf } f} Pdx = \int_a^b P(\gamma(t))x'(t)dt = \int_a^b P(t, f(t))dt. \tag{3}$$

Análogamente, la integral sobre graf g podemos usar la parametrización $\gamma(t) = ((1-t)b + ta, g((1-t)b + ta))$ para $t \in [0, 1]$, de modo que $\gamma'(t) = -(b-a)(1, g'((1-t)b + ta))$ y

$$\int_{\text{graf } g} Pdx = \int_0^1 P(\gamma(t))x'(t)dt = -(b-a)\int_0^1 P((1-t)b + ta, g((1-t)b + ta))dt = -\int_a^b P(x, g(x))dx. \tag{4}$$

Suatituyendo eq. (3) y eq. (4) en eq. (1) concluimos

$$\int_{\partial D} Pdx = \int_a^b P(x, f(x))dx - \int_a^b P(x, g(x))dx$$

y por eq. (1) tenemos

$$-\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dydx = \int_{\partial D} Pdx.$$

Con un razonamiento análogo al anterior pero usando que $D = \{(x, y) \,|\, x \in [l(y), m(y)],\ x \in [c, d]\}$ para dos funciones reales l, m y dos números $c, d \in \mathbb{R}$ concluimos que

$$\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dydx = \int_{\partial D} Qdy$$

y con ello la prueba esta completa. $\square$

APLICACIÓN: Laplaciano en polares

Como aplicación de Green, veremos una forma "fácil" de calcular el laplaciano en coordenadas polares, para ello, si en Green (segunda representación vectorial) usamos que $F = \nabla f$ para alguna función escalar $f : D \to \mathbb{R}$ con segundas derivadas continuas en D, entonces tendremos:

$$\int_{\partial D} \nabla f \cdot \mathbf{N}\, ds = \int_D \Delta f \, dxdy$$

Dado $A \subset \mathbb{R}^2$, definamos $\operatorname{diam}(A) := \sup\{\|y - x\| \,|\, x, y \in D\}$. Asuma $(x_0, y_0) \in D$ fijo y $\{D_n\}$ una sucesión de vecindades compactas de (x_0, y_0) contenidas en D, tal que diam D_n tiende a cero si $n \to \infty$. Por la continuidad de Δf, tenemos que para cada $n > 0$, existe $(\bar{x}_n, \bar{y}_n), (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \in D_n$ tales que

$$\Delta f(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \leq \Delta f(x, y) \leq \Delta f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \quad \text{para todo } (x, y) \in D_n$$

integrando en D_n y como $\Delta f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$ y $\Delta f(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ son constantes tenemos

$$\Delta f(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \leq \frac{1}{A(D_n)} \int_{D_n} \Delta f(x, y)\, dxdy \leq \Delta f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} (\bar{x}_n, \bar{y}_n) = \lim_{n\to\infty} (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = (x_0, y_0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{A(D_n)} \int_{D_n} \Delta f(x, y)\, dxdy = \Delta f(x_0, y_0),$$

Donde la última implicación se sigue de la continuidad de Δf en (x_0, y_0). Por e teorema de Green, tenemos

$$\Delta f(x_0, y_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{A(D_n)} \int_{\partial D_n} \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{N}\, ds$$

Para estimar el laplaciano en cualquier sistema de coordenadas necesitamos encontrar esta integral de línea, y para hacerlo, resulta conveniente escribir ∇f en el sistema coordenado correspondiente y escoger D_n con la simetría adecuada para el sistema de coordenadas de interés. En nuestro caso usaremos coordenadas polares, en donde sabemos que

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

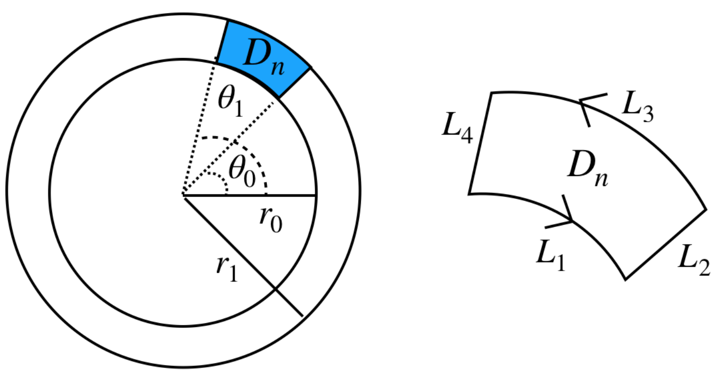
y como región de integración D_n usaremos un sector circular $D_n = \{r(\cos\theta, \sin\theta) \,|\, r \in [r_0, r_1]\ \theta \in [\theta_0, \theta_1]\}$ observe que si $\operatorname{diam} D_n \to 0$ entonces $\theta_1 \to \theta_0$ y $r_1 \to r_0$. Además $\partial D_n = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$ donde

$$\begin{array}{lll} L_1: & \gamma(t) = r_0(\cos(\theta_0+\theta_1-t), \sin(\theta_0+\theta_1-t)) & t \in [\theta_0, \theta_1] \\ L_2: & \gamma(t) = t(\cos\theta_0, \sin\theta_0) & t \in [r_0, r_1] \\ L_3: & \gamma(t) = r_1(\cos(t), \sin(t)) & t \in [\theta_0, \theta_1] \\ L_4: & \gamma(t) = (r_1+r_0-t)(\cos\theta_1, \sin\theta_1) & t \in [r_0, r_1] \end{array}$$

Al derivar obtenemos los vectores tangentes y normales en cada caso

$$\begin{array}{ll} L_1: & T = (\sin(\theta_0+\theta_1-t), -\cos(\theta_0+\theta_1-t)), \quad N = (-\cos(\theta_0+\theta_1-t), -\sin(\theta_0+\theta_1-t)) \\ L_2: & T = (\cos\theta_0, \sin\theta_0), \quad N = (\sin\theta_0, -\cos\theta_0) \\ L_3: & T = (-\sin t, \cos t), \quad N = (\cos t, \sin t) \\ L_4: & T = -(\cos\theta_1, \sin\theta_1), \quad N = (-\sin\theta_1, \cos\theta_1) \end{array}$$

De este modo, podemos usar que la integral de línea distribuye sobre uniones de curvas de modo que



$$\int_{\partial D_n} \nabla f \cdot \mathbf{N} ds = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial L_i} \nabla f \cdot \mathbf{N} ds$$

donde

$$\int_{L_1} \nabla f \cdot \mathbf{N} ds = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \nabla f(\gamma(t)) \cdot \mathbf{N}(t)\, \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\theta_0}^{\theta_1} -f_r(r_0, \theta_0+\theta_1-t)\, r_0 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} -f_r(r_0, t)\, r_0 dt$$

$$\int_{L_2} \nabla f \cdot \mathbf{N} ds = \int_{r_0}^{r_1} \nabla f(\gamma(t)) \cdot \mathbf{N}(t)\, \|\gamma'(t)\| dt = \int_{r_0}^{r_1} -\frac{1}{t} f_\theta(t, \theta_0)\, dt$$

$$\int_{L_3} \nabla f \cdot \mathbf{N} ds = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \nabla f(\gamma(t)) \cdot \mathbf{N}(t)\, \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\theta_0}^{\theta_1} f_r(r_1, t)\, r_1 dt$$

$$\int_{L_4} \nabla f \cdot \mathbf{N} ds = \int_{r_0}^{r_1} \nabla f(\gamma(t)) \cdot \mathbf{N}(t)\, \|\gamma'(t)\| dt = \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{r_0+r_1-t} f_\theta(r_0+r_1-t, \theta_1)\, dt = \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{t} f_\theta(t, \theta_1)\, dt$$

Sumando todas las integrales tendremos:

$$\int_{\partial D_n} \nabla f \cdot \mathbf{N} ds = \int_{\theta_0}^{\theta_1} f_r(r_1,t)\, r_1 - f_r(r_0,t)\, r_0 dt + \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{t}\left[f_\theta(t,\theta_1) - f_\theta(t,\theta_0)\right] dt$$

Usando el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$f_r(r_1,t)\, r_1 - f_r(r_0,t)\, r_0 = \int_{r_0}^{r_1} \frac{\partial}{\partial r}(r f_r(r,t)) dr \quad \text{y} \quad f_\theta(t,\theta_1) - f_\theta(t,\theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} f_{\theta\theta}(t,\theta) d\theta$$

Sustituyendo en la integral sobre ∂D_n tendremos

$$\int_{\partial D_n} \nabla f \cdot \mathbf{N} ds = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{r_0}^{r_1} \frac{\partial}{\partial r}(r f_r(r,t)) dr dt + \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{t} \int_{\theta_0}^{\theta_1} f_{\theta\theta}(t,\theta) d\theta dt$$

Cambiando t por θ en la primer integral y t por r en la segunda tendremos

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D_n} \nabla f \cdot \mathbf{N} ds &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r f_r(r,\theta))\, r dr d\theta + \int_{r_0}^{r_1} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta}(r,\theta)\, r d\theta dr \\
&= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r f_r(r,\theta)) + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta}(r,\theta)\, r d\theta dr \\
&= \int_{D_n} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r f_r(r,\theta)) + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta}(r,\theta)\, dA
\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\Delta f(x_0,y_0) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{A(D_n)} \int_{\partial D_n} \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{N}\, ds \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{A(D_n)} \int_{D_n} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r f_r(r,\theta)) + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta}(r,\theta)\, dA \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r f_r(r,\theta)) + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta}(r,\theta)
\end{aligned}$$

Teorema 2 (Stokes)**.** *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ conjunto abierto y acotado tal que el teorema de Green aplique y S superficie orientada definida por la parametrización suave y uno a uno (hasta la frontera) $T : D \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ con segundas derivadas continuas. Si ∂S denota la frontera orientada de S y $\mathbf{F}$ es un campo vectorial C^1, entonces*

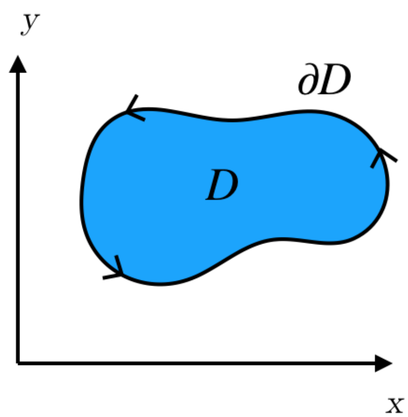
$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\bar{\sigma} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\bar{s}$$

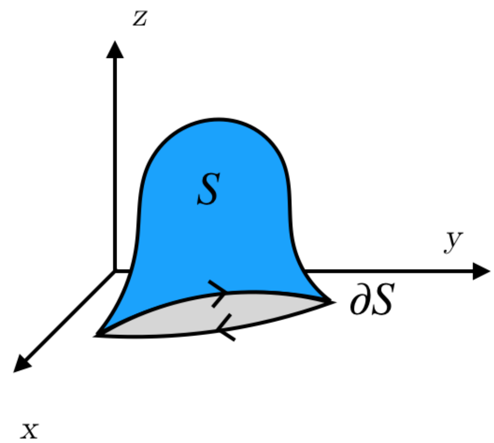
Demostración. Dado que T es uno a uno hasta la frontera, entonces $\partial S = T(\partial D)$, además la orientación de ∂D induce una orientación en ∂S. Con ello, si $(u(t), v(t))$ es el parámetro para describir a ∂D,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\bar{s} &= \int_{\partial D} \mathbf{F}(T(u(t),v(t))) \cdot \frac{d}{dt} T(u(t),v(t))\, dt \\
&= \int_{\partial D} \mathbf{F}(T(u(t),v(t))) \cdot [T_u(u(t),v(t)) u_t + T_v(u(t),v(t)) v_t]\, dt
\end{aligned}$$

donde la última identidad se tiene por regla de la cadena. Observe que la representación no paramétrica de la integral anterior en el espacio u, v es

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\bar{s} &= \int_{\partial D} \mathbf{F}(T(u,v)) \cdot T_u(u,v) du + \mathbf{F}(T(u,v)) \cdot T_v(u,v) dv \\
&= \int_D \left(\mathbf{F}(T(u,v)) \cdot T_v(u,v)\right)_u - \left(\mathbf{F}(T(u,v)) \cdot T_u(u,v)\right)_v dudv.
\end{aligned} \tag{5}$$





La última identidad se obtuvo de aplicar el teorema de Green sobre el dominio D. Ahora analicemos el integrando con un poco de algebra.

$$(\mathbf{F}(T(u,v)) \cdot T_v(u,v))_u = \frac{\partial \mathbf{F}(T(u,v))}{\partial u} \cdot T_v(u,v) + \mathbf{F}(T(u,v)) \cdot T_{uv}(u,v)$$

$$(\mathbf{F}(T(u,v)) \cdot T_u(u,v))_v = \frac{\partial \mathbf{F}(T(u,v))}{\partial v} \cdot T_u(u,v) + \mathbf{F}(T(u,v)) \cdot T_{vu}(u,v)$$

Debido a que T tiene segundas derivadas continuas

$$L := (\mathbf{F}(T(u,v)) \cdot T_v(u,v))_u - (\mathbf{F}(T(u,v)) \cdot T_u(u,v))_v = \frac{\partial \mathbf{F}(T(u,v))}{\partial u} \cdot T_v(u,v) - \frac{\partial \mathbf{F}(T(u,v))}{\partial v} \cdot T_u(u,v).$$

Al usar regla de la cadena tendremos

$$\frac{\partial \mathbf{F}(T(u,v))}{\partial u} = \mathbf{F}_x x_u + \mathbf{F}_y y_u + \mathbf{F}_z z_u = D\mathbf{F} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} = D\mathbf{F}\, T_u$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}(T(u,v))}{\partial v} = \mathbf{F}_x x_v + \mathbf{F}_y y_v + \mathbf{F}_z z_v = D\mathbf{F} \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = D\mathbf{F}\, T_v$$

donde $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$, $\mathbf{F}_z$ y $D\mathbf{F}$ están evaluadas en $T(u,v)$, y T_u, T_v dependen de (u,v); a partir de aquí omitiremos dichas evaluaciones y dependencias para facilitar la lectura. Así

$$\begin{aligned} L =& D\mathbf{F}\, T_u \cdot T_v - D\mathbf{F}\, T_v \cdot T_u \\ =& T_v^T D\mathbf{F}\, T_u - T_u^T D\mathbf{F}\, T_v \qquad \text{notación matricial} \\ =& T_u^T (D\mathbf{F}^T - D\mathbf{F}) T_v. \end{aligned}$$

La última igualdad se sigue pues $T_v^T D\mathbf{F}\, T_u \in \mathbb{R}$ y por tanto es igual a su transpuesto. Observe que

$$D\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{1,x} & F_{1,y} & F_{1,z} \\ F_{2,x} & F_{2,y} & F_{2,z} \\ F_{3,x} & F_{3,y} & F_{3,z} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D\mathbf{F}^T - D\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & F_{2,x} - F_{1,y} & F_{3,x} - F_{1,z} \\ F_{1,y} - F_{2,x} & 0 & F_{3,y} - F_{2,z} \\ F_{1,z} - F_{3,x} & F_{2,z} - F_{3,y} & 0 \end{pmatrix}$$

Dado que las entradas distintas de cero en $D\mathbf{F}^T - D\mathbf{F}$ corresponden a las entradas de $\nabla \times \mathbf{F}$,

$$(D\mathbf{F}^T - D\mathbf{F}) T_v = \begin{pmatrix} 0 & (\nabla \times \mathbf{F})_3 & -(\nabla \times \mathbf{F})_2 \\ -(\nabla \times \mathbf{F})_3 & 0 & (\nabla \times \mathbf{F})_1 \\ -(\nabla \times \mathbf{F})_2 & -(\nabla \times \mathbf{F})_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (T_v)_1 \\ (T_v)_2 \\ (T_v)_3 \end{pmatrix} = T_v \times (\nabla \times \mathbf{F})$$

Finalmente,

$$L = T_u^T(D\mathbf{F}^T - D\mathbf{F})T_v = (D\mathbf{F}^T - D\mathbf{F})T_v \cdot T_u = T_u \cdot T_v \times (\nabla \times \mathbf{F}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot T_u \times T_v. \tag{6}$$

La última igualdad se sigue de que el producto caja no cambia ante permutaciones cíclicas en sus tres entradas. Por eq. (5) y eq. (6) se sigue que

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\bar{s} = \int_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot T_u \times T_v \, dudv = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\bar{\sigma}$$

□

Teorema 3 (Gauss). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ conjunto Jordan medible de tipo IV y $\partial\Omega$ la superficie cerrada y orientada positivamente que acota a Ω. Suponga $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo vectorial con derivadas continuas en Ω, entonces*

$$\int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, dv = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma, \quad \mathbf{n} \textit{ normal exterior a } \partial\Omega$$

Demostración. Notemos que si escribimos explícitamente ambas integrales, tendremos

$$\int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} dv = \int_\Omega F_{1,x} \, dv + \int_\Omega F_{2,y} \, dv + \int_\Omega F_{3,z} \, dv$$

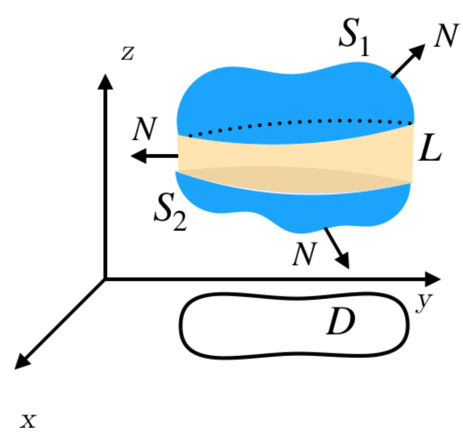
$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} d\sigma = \int_{\partial\Omega} F_1 i \cdot \mathbf{N} d\sigma + \int_{\partial\Omega} F_2 j \cdot \mathbf{N} d\sigma + \int_{\partial\Omega} F_3 k \cdot \mathbf{N} d\sigma$$

La demostración termina si probamos

$$\int_\Omega F_{1,x} \, dv = \int_{\partial\Omega} F_1 i \cdot \mathbf{N} ds, \quad \int_\Omega F_{2,y} \, dv = \int_{\partial\Omega} F_2 j \cdot \mathbf{N} ds, \quad \int_\Omega F_{3,z} \, dv = \int_{\partial\Omega} F_3 k \cdot \mathbf{N} ds$$

Nos enfocaremos en probar la última de estas tres igualdades pues las demás se siguen por un método análogo. Como Ω es tipo IV, en particular es tipo I y con ello $\Omega = \{(x, y, z) | (x, y) \in D \;\; z \in [f(x, y), g(x, y)]\}$ donde $D \subset \mathbb{R}^2$ es tipo I, II o III. Con ello

$$\begin{aligned} \int_\Omega F_{3,z} dv &= \int_D \left(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} F_{3,z} \, dz \right) dydx \\ &= \int_D \left[F_3(x, y, g(x, y)) - F_3(x, y, f(x, y)) \right] dydx \end{aligned} \tag{7}$$



Por otro lado, notemos que $\partial\Omega = S_1 \cup S_2 \cup L$ donde $S_1 = \operatorname{graf} g$, $S_2 = \operatorname{graf} f$ y L se puede pensar como una vaya vertical cuya altura en cada punto $(x, y) \in \partial D$ es $g(x, y) - f(x, y)$. De hecho, si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [t_0, t_1]$ es la parametrización positiva de ∂D entonces

$$L = \{(x(t), y(t), sg(\gamma(t)) + (1 - s)f(\gamma(t))) \,|\, t \in [t_0, t_1], s \in [0, 1]\}$$

con ello al derivar tenemos

$$T_t \propto \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ [s\nabla g(\gamma(t)) + (1-s)\nabla f(\gamma(t))] \cdot \gamma'(t) \end{pmatrix}, \quad T_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T_t \times T_s = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto D es una superficie vertical. Con ello, la integral

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F_3\, k \cdot \mathbf{N}\, d\sigma &= \int_{S_1} F_3\, k \cdot \mathbf{N}\, d\sigma + \int_{S_2} F_3\, k \cdot \mathbf{N}\, d\sigma + \int_{L} F_3\, k \cdot \mathbf{N}\, d\sigma \\ &= \int_{S_1} F_3\, k \cdot \mathbf{N}\, d\sigma + \int_{S_2} F_3\, k \cdot \mathbf{N}\, d\sigma, \end{aligned}$$

pues sobre L se tiene que $N = T_t \times T_s / \|T_t \times T_s\|$ es ortogonal a $k = (0,0,1)^T$. Además como $\partial\Omega$ es una superficie cerrada y orientada tenemos que

$$\begin{aligned} S_1: \quad &\{(x,y,g(x,y)) \,|\, (x,y) \in D\}, \quad \mathbf{N} = \frac{(-g_x, -g_y, 1)^T}{\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}}, \quad k \cdot \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}}, \quad d\sigma = \sqrt{1+g_x^2+g_y^2}dxdy. \\ S_2: \quad &\{(x,y,f(x,y)) \,|\, (x,y) \in D\} \quad \mathbf{N} = \frac{(f_x, f_y, -1)^T}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \quad k \cdot \mathbf{N} = \frac{-1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \quad d\sigma = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy \end{aligned}$$

Sustituyendo en cada una de las integrales tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F_3\, k \cdot \mathbf{N}\, d\sigma &= \int_{S_1} F_3\, k \cdot \mathbf{N}\, d\sigma + \int_{S_2} F_3\, k \cdot \mathbf{N}\, d\sigma, \\ &= \int_{D} F_3(x,y,g(x,y))dxdy + \int_{D} -F_3(x,y,f(x,y))dxdy \\ &= \int_{\Omega} F_{3,z} dv, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene por (7). Con ello la prueba esta completa □