Exponencial y logaritmo

Lauro Morales Montesinos

Agosto 2023

En estas notas construiremos a la función exponencial a partir de la las soluciones no constantes de la ecuación funcional $f(x+y) = f(x)f(y)$. Primero buscaremos soluciones en los naturales, después extemos a los enteros y racionales preservando dicha propiedad. Finalmente y con ayuda de sucesiones probaremos que dicha función definida para los racionales tiene una extensión natural para los irracionales. Dicha extensión resultará ser continua y monotona. Finalmente, restringiremos el dominio y codominio a fin de determinar la inversa y sus propiedades.

1. Sucesión exponencial

Como primer paso en nuestra construcción de la exponencial, buscaremos soluciones no triviales a la relación funcional

$$f(x+y) = f(x)f(y) \tag{1.1}$$

donde $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, es decir construiremos a la *sucesión exponencial*. Para ello usaremos la propiedad del neutro aditivo de los naturales, es decir, si $y = 0$ tendremos que

$$f(x) = f(x+0) = f(0)f(x)$$

De donde se deduce automaticamente que la sucesión exponencial satisface

$$f(0) = 1. \tag{1.2}$$

Continuando con nuestro análisis, si $x > 1$, entonces $x = 1 + (x-1)$, de donde

$$f(x) = f(1 + (x-1)) = f(1)f(x-1)$$

iterando el proceso x veces tendremos

$$f(x) = f(1)^x \tag{1.3}$$

Observa que basta con escoger $f(1)$ para que toda la sucesión exponencial quede completamente determinada. Entonces llamemos $\alpha := f(1)$, de este modo

$$f(x) = \alpha^x \quad x \in \mathbb{N}, \tag{1.4}$$

Es decir la sucesión exponencial son todas las potencias naturales del número α. A este se le conoce como **base**. Hasta el momento α puede ser cualquier real exceptuando $\alpha = 1$ y $\alpha = 0$ ¿Por qué? Además, al restringimos $\alpha > 0$ tenemos dos comportamientos para la sucesión exponencial: (a) si $0 < \alpha < 1$ la sucesión exponencial es **decreciente** mientras que si $\alpha > 1$ La sucesión exponencial es **creciente**. ¿Por qué?

2. Extensión a los enteros

Ahora toca extender la función exponencial a los enteros. Observa que es suficiente con definirla para los negativos, pues los naturales están cubiertos en la sección anterior. Para ello si $z < 0$ entonces $-z > 0$ y $z + (-z) = 0$. Con esto y ecuación (1.2), resulta que $1 = f(0) = f(z + (-z))$. Si forzamos a que la relación ecuación (1.1) continue siendo válida resulta

$$1 = f(z)f(-z) \quad \Rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{f(-z)} = \frac{1}{\alpha^{-z}}$$

Es decir la función exponencial de base α del número negativo z es el reciproco de la potencia $(-z)$-ésima de α. Resulta inmediato que

$$f(z) = \alpha^z, \quad z \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

3. Extensión a los racionales

Para extender la función exponencial a los racionales primero definiremos el valor de esta función a los recíprocos. Recordemos que en todo momento pretendemos mantener la validez de la relación funcional ecuación (1.1).

Sea $q \in \mathbb{Z}$ con $q \neq 0$, sabemos que el reciproco se define como la unica solución x a la ecuación $xq = 1$. Sin pérdida de generalidad, piende que $q > 1$ entonces

$$\alpha = f(1) = f(xq) = f(x + x(q-1)) = f(x)f(x(q-1))$$

iterando el proceso tendremos

$$\alpha = f(x)^q$$

Observa que si $\alpha < 0$ entonces la función exponencial NO puede definirse para valores pares de q pues la raíz de números negativos *no esta definida* (al menos en los reales). Ello impone naturalmente la condición $\alpha > 0$. De donde conviene definir

$$f(x) = f\left(\frac{1}{q}\right) := \sqrt[q]{\alpha} = \alpha^{1/q} \tag{3.1}$$

Donde la última identidad se sigue por peopiedades de los exponentes. En otras palabras la función exponencial para el reciproco de un número q es la raíz q-ésima de la base.

Ahora bien, si consideramos que $r \in \mathbb{Q}$ entonces sabemos que existen $p, q \in \mathbb{Z}$ con $q \neq 0$ tal que $r = p/q$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir $p > 1$, de donde

$$f(r) = f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{1}{q}p\right) = f\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q}(p-1)\right) = f\left(\frac{1}{q}\right) f\left(\frac{1}{q}(p-1)\right)$$

iterando el proceso tendremos

$$f(r) = f\left(\frac{1}{q}\right)^p = \left(\alpha^{1/q}\right)^p = \alpha^{p/q}$$

De donde resulta inmediato que la función exponencial de base α para un racional esta dada por

$$f(r) = \alpha^r, \quad r \in \mathbb{Q}. \tag{3.2}$$

Hasta aqui vale la pena recordar que:

- $\alpha^0 = 1$
- $\alpha > 0$
- α^x es creciente para $\alpha > 1$ y decreciente para $\alpha \in (0, 1)$.(Pruebalo!!!)
- $\alpha^x > 0$ ¿Por qué?

4. Extensión a los irracionales

La extensión a los números irracionales se hará vía sucesiones, donde asumiremos algunos resultados fundamentales de este tema.

Lemma 4.1. *Sea* $\{x_n\}_{n>0}$ *una sucesión de reales.*

$$\lim x_n = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \{x_n - \beta\}_{n>0} \text{ es nula} \quad \Leftrightarrow \quad \{|x_n - \beta|\}_{n>0} \text{ es nula}$$

Más aún si $\{x_n\}_{n>0}$ *y* $\{y_n\}_{n>0}$ *son convergentes al mismo límite entonces* $\{x_n - y_n\}_{n>0}$ *es nula.*

Lemma 4.2. *Sean* $\{x_n\}_{n>1}$ *y* $\{y_n\}_{n>1}$ *dos sucesiones convergentes tales que* $x_n < y_n$ *entonces* $\lim x_n \leq \lim y_n$.

Proposición 4.3 (Principio de Weierstrass)**.** *Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.*

Corolario 4.4. *Toda sucesión acotada tiene una subsucesión monótona.*

Lemma 4.5. *Sea* $\{x_n\}_{n>0}$ *sucesión nula de racionales y ´sea* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *como la función exponencial de base* α *definida en ecuación* (3.2). *La sucesión* $\{f(x_n)\}_{n>0}$ *converge a 1.*

Demostración. Si $\lim x_n = 0$, podemos pensar (sin pérdida de generalidad) que $|x_n| < 1$, entonces por la propiedad arquimediana, para cada x_n existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| \leq m_n^{-1}$. De manera automática concluimos que $m_n \to \infty$ si $n \to \infty$. En otras palabras para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$-\frac{1}{m_n} < x_n < \frac{1}{m_n}$$

como la exponencial es monotona, tenemos que

$$f\left(\tfrac{-1}{m_n}\right) \leq f(x_n) \leq f\left(\tfrac{1}{m_n}\right) \qquad \text{si } \alpha > 1$$

$$f\left(\tfrac{1}{m_n}\right) \leq f(x_n) \leq f\left(\tfrac{-1}{m_n}\right) \qquad \text{si } 0 < \alpha < 1$$

Usando que $f(1/m) = \sqrt[m]{\alpha}$ Ambos casos se resumen en la relación

$$\min\left\{\frac{1}{\sqrt[m_n]{\alpha}}, \sqrt[m_n]{\alpha}\right\} \leq f(x_n) \leq \max\left\{\frac{1}{\sqrt[m_n]{\alpha}}, \sqrt[m_n]{\alpha}\right\}$$

Al tomar el límite $n \to \infty$ sabemos que $\sqrt[m_n]{\alpha}$ converge a 1 cuando $m_n \to \infty$ independientemente del valor de α. Concluimos por lema 4.2 que $\lim f(x_n)$ queda "ensandwichado" por arriba y por abajo por 1, y por tanto la sucesión $\{f(x_n)\}$ es convergente a 1. □

Lemma 4.6 (Existencia y unicidad de la exponencial)**.** *Sea $\xi \in \mathbb{R}$ fijo y $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ dos sucesiones de racionales convergentes a ξ. Entonces las sucesiones $\{f(x_n)\}$ y $\{f(y_n)\}$ son convergentes al mismo límite.*

Demostración.

Existencia del límite $\lim f(x_n)$*:* Sea $\{x_n\}_{n>0}$ sucesión convergente. Entonces $\{x_n\}_{n>0}$ es acotada y por el corolario 4.4 sabemos que existe una subsucesión monotona $\{x_{n_k}\}_{k>0}$. Observa que esta subsucesión es convergente al mismo límite que $\{x_n\}_{n>0}$ pues esta última es convergente. Ahora construya la sucesión $\{f(x_{n_k})\}_{k>0}$. Observa que esta nueva sucesión de imagenes es monotona (puede ser creciente o decreciente) debido a la monotonía de la función exponencial y la monotonía de la subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k>0}$. Más aún, es acotada, ya que $\{x_{n_k}\}$ es acotada por ser convergente, de hecho si M es cota, entonces

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad -M \leq x_{n_k} \leq M \quad \Rightarrow \quad 0 \leq f(x_{n_k}) \leq \max\{f(M), f(-M)\}$$

Por lo tanto la sucesión $\{f(x_{n_k})\}_{k>0}$ es convergente. Probaremos que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n>0}$ también es convergente y converge al mismo valor. Para ello basta notar que debido a ecuación (1.1) se tiene

$$f(x_k) = f((x_k - x_{n_k}) + x_{n_k}) = f(x_k - x_{n_k})f(x_{n_k})$$

Como $\{x_k - x_{n_k}\}_k$ es sucesión nula de racionales, sabemos por lema 4.5 que $\{f(x_k - x_{n_k})\}_{k>0}$ converge a 1 y por propiedades del límite:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} f(x_k - x_{n_k})f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})$$

Es decir, $\lim f(x_k)$ existe.

Unicidad del límite: Como $\{x_n\}_{n>0}$ y $\{y_n\}_{n>0}$ son convergentes sabemos que las sicesiones $\{f(x_n)\}_{n>0}$ y $\{f(y_n)\}_{n>0}$ son convergentes. Probaremos que los limites a los que convergen son el mismo. Observa que

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) - f(y_n) &= f(x_n)\,[1 - f(y_n)/f(x_n)] \\ &= f(x_n)\,[1 - f(y_n)f(-x_n)] \\ &= [1 - f(x_n)f(y_n - x_n)]\end{aligned}$$

Como $\{x_n\}_{n>0}$ y $\{y_n\}_{n>0}$ convergen al mismo límite, la sucesión $\{y_n - x_n\}_{n>0}$ es nula y por lema 4.5 la sucesión $\{f(y_n - x_n)\}_{n>0}$ converge a 1. Asi que al tomar el límite en la última relación tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) - f(y_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)[1 - f(y_n - x_n)] = 0$$

Es decir $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$. □

El lema anterior nos muestra que al aproximar a cualquier real ξ por una $\{x_n\}$ sucesión de racionales, la sucesión $\{f(x_n)\}$ es convergente pero el valor del límite NO depende de la sucesión elegida para aproximar ξ.

Definición 1. Definimos a la función exponencial de base $\alpha > 0$ de manera única para cualquier $\xi \in \mathbb{R}$ como

$$\alpha^{\xi} := \lim_{n\to\infty} \alpha^{x_n}$$

donde $\{x_n\}$ es sucesión de racionales convergente a ξ.

Este tipo de convergencia donde el valor del límite en el punto ξ para una función f es **independiente de la sucesión aproximante** para ξ se denota por:

$$\lim_{x\to\xi} f(x)$$

y puede probarse que es equivalente a la definición usual de límite de funciones de variable continua.

Volviendo a la función exponencial, podemos volver a preguntarnos sobre las propiedades que cumple. El siguiente teorema puede probarse a partir de la (nueva) definición 1 de exponencial por sucesiones.

Teorema 1. *Sea $\alpha \neq 1$ positiva y defina la función exponencial de base alpha como en la definición 1. Esta función satisface:*

1. $\alpha^0 = 1$.
2. $\alpha^{x+y} = \alpha^x \alpha^y$ *para toda* $x, y \in \mathbb{R}$.
3. *La exponencial es estrictamente creciente si* $\alpha > 1$ *y estrictamente decreciente si* $0 < \alpha < 1$.
4. $\alpha^x > 0$ *para toda* $x \in \mathbb{R}$.
5. α^x *es biyectiva de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}^+$.
6. α^x *es continua en* $\mathbb{R}$

Como consequencia de este teorema se obtienen la siguiente

Definición 2. Sea $\alpha \neq 1$ positiva. Definimos al logaritmo de base α como la función $\log_\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ que satisface

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \log_\alpha(\alpha^x) = x$$
$$\forall y \in \mathbb{R}^+ \quad \alpha^{\log_\alpha y} = y$$

El siguiente corolario resume las propiedades básicas del logaritmo de base α y su demostración se deja al lector.

Corolario 4.7. *Sea $\alpha \neq 1$ positiva. La función $\log_\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ satisface*

1. $\log_\alpha 1 = 0$.
2. $\log_\alpha(x+y) = \log_\alpha(x) + \log_\alpha(y)$ *para toda* $x, y \in \mathbb{R}^+$.
3. $\log_\alpha$ *es estrictamente creciente si* $\alpha > 1$ *y estrictamente decreciente si* $0 < \alpha < 1$.
4. $\log_\alpha(x)$ *es continua en* $\mathbb{R}^+$
5. $\lim \log_\alpha(x_n) = -\infty$ *para toda* $\{x_n\}$ *sucesión nula.*
6. $\lim \log_\alpha(x_n) = \infty$ *para toda* $\{x_n\}$ *divergente a* ∞.

5. Cambio de base

Como vemos para diferentes valores de la base se pueden definir distintas funciones exponencial y logaritmo. En esta sección veremos que todas ellas están relacionadas.

Lemma 5.1. *Sean α y β dos constantes poaitivas y distintas de 1. Entonces*

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \alpha^x = \beta^{x \log_\beta \alpha}$
2. $\forall y \in \mathbb{R}^+ \quad \log_\alpha(y) = \log_\alpha(\beta)\,\log_\beta(y)$

Demostración. En el primer caso basta con notar que si $\alpha = \beta^{\log_\beta(\alpha)}$ entonces $\alpha^x = (\beta^{\log_\beta(\alpha)})^x = \beta^{x \log_\beta \alpha}$. Para el segundo caso hay que notar que $y = \beta^{\log_\beta y}$ pero $\beta = \alpha^{\log_\alpha \beta}$ entonces $y = (\alpha^{\log_\alpha \beta})^{\log_\beta y}$. Finalmente si tomamos $\log_\alpha$ en ambos lados tendremos la identidad señalada. □

Es importante resaltar que bases grandes son utilies para cantidades grandes, por ejemplo la exponencial de base $\alpha = 10$ es útil en ingeniería. Por otro lado bases pequeñas son utiles para trabajar con numeros pequeños.

A pesar de la utildad, no resulta conveniente trabajar con distintas bases y por ello asumiremos como base estándar al número irracional e. La exponencial y logaritmo generadas por esta base se llaman simplemente **exponencial** y **logaritmo** respectivamente.

Lemma 5.2. *La función exponencial satisface*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Demostración. En esta prueba nos restringiremos al caso $x \in \mathbb{N}$ pues en caso general se analizará a partir de series. Para este caso sabemos que

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \Rightarrow \quad e^x = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^x$$

Como la exponencial es una función continua, tenemos que

$$e^x = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

usando el binomio de Newton tenemos:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(\frac{x}{m}\right)^k &= \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} \left(\frac{x}{m}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} \frac{m!}{(m-k)!} \frac{1}{m^k} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{k}{m}\right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}
\end{aligned}$$

Además, si $n < m$ podemos obtener que

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m &= \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{k}{m}\right) \\
&\geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{k}{m}\right)
\end{aligned}$$

Es decir

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} \geq \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{k}{m}\right)$$

Al tomar $m \to \infty$ tendremos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Tomando ahora $n \to \infty$ concluimos

$$e^x = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

□

Otros resultados importantes para la función exponencial y logaritmo son los comportamientos asintóticos y algunos límites importantes.

Lemma 5.3. *La función exponencial y logaritmo satisfacen:*

1. $e^x = 1 + x + r(x)$ *donde* $\lim_{x\to 0} \frac{|r(x)|}{x^2} = 0$.
2. $log(1 + x) = x + r(x)$ *donde* $\lim_{x\to 0} \frac{|r(x)|}{x^2} = 0$.
3. $\lim_{x\to 0} x \log(x) = 0$.
4. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$
5. $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$