Funciones convexas

Lauro Morales Montesinos

Mayo 2023

1. Resultados principales

Iniciamos esta sección con un par de definiciones importantes para el desarrollo del tema.

Definición 1. Sean $a < b$ dos reales. La función $\ell(\cdot) : [0,1] \to [a,b]$ dada por $\ell(t) = (1-t)a + tb$ se conoce como *combinación convexa* de a con b y peso t.

El lector puede probar fácilmente la siguiente afirmación.

Lemma 1.1. *Sea $\ell(t)$ la combinación convexa de a con b, entonces:*

1. *ℓ es una función biyectiva.*
2. *$\ell \in C^{\infty}([a,b])$ (tienen infinitas derivadas, todas ellas continuas en $[a,b]$).*
3. *$\ell(t) - a = t(b-a)$ y $b - \ell(t) = (1-t)(b-a)$*

Observa que el último punto indica que $\ell(t)$ parte en dos segmentos al intervalo $[a,b]$, es decir $[a,b] = [a,\ell(t)] \cup [\ell(t), b]$ donde la distancia del primero es t-veces la distancia total, mientras que la distancia del segundo es $(1-t)$-veces la distancia total.

Definición 2. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Decimos que f es una función *convexa* si dados $x, y \in [a,b]$ con $x < y$ tenemos

$$f\left((1-t)x + ty\right) \leq (1-t)f(x) + tf(y), \tag{1.1}$$

para todo $t \in [0,1]$. Más aún, si se mantiene la desigualdad estricta en ecuación (1.1) para todo $t \in (0,1)$ decimos que f es *estrictamente convexa.*

Definición 3. Decimos que f es (estrictamente) *concava* si $-f$ es (estrictamente) convexa.

El primer resultado muestra que una función convexa es continua.

Lemma 1.2. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ convexa (o concava), y $x_0 \in (a,b)$ tal que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe entonces f es continua en x_0.*

Demostración. Asuma $x \in (a,b)$ tal que $x \neq x_0$ y f convexa. Por tricotomia sabemos que $a < x < x_0 < b$ o $a < x_0 < x < b$. Probaremos la afirmación en el primer caso. Debido a que $x \in (a, x_0)$ y $x_0 \in (x, b)$ existen $s, t \in (0,1)$ tales que $x = (1-t)a + tx_0$ y $x_0 = (1-s)x + sb$. Como la función es convexa tenemos

$$f(x) - f(x_0) \leq (1-t)f(a) + tf(x_0) - f(x_0) = (1-t)(f(a) - f(x_0))$$

$$f(x) - f(x_0) \geq f(x) - (1-s)f(x) - sf(b) = s(f(x) - f(b))$$

por tanto:

$$s(f(x) - f(b)) \leq f(x) - f(x_0) \leq (1-t)(f(a) - f(x_0)) \tag{1.2}$$

Si asumimos que $x \to x_0$ entonces $s \to 0$ y $t \to 1$ debido a las definiciones de s y t. Con esto, las cotas para $f(x) - f(x_0)$ en ecuación (1.2) satisfacen que

$$\lim_{x\to x_0} s(f(x) - f(b)) = \lim_{s\to 0} s\left(\lim_{x\to x_0} f(x) - f(b)\right) = 0$$

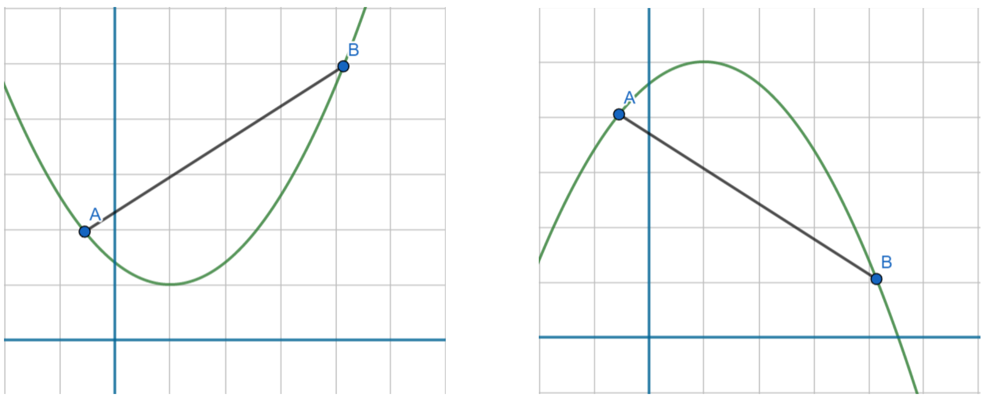
$$\lim_{x\to x_0}(1-t)(f(a)-f(x_0)) = \lim_{t\to 1}(1-t)(f(a)-f(x_0)) = 0$$

Por tanto, concluimos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ y por tanto la función es continua en x_0. La prueba del segundo caso es análoga y omitiremos la prueba.

Si ahora asumimos f concava, sabemos que $-f$ es convexa y por las líneas anteriores tenemos que $-f$ es continua en x_0. Esto último implica que f también es continua en x_0

□

El siguiente resultado muestra que la gráfica de f en un intervalo $[\xi,\eta]\subset[a,b]$ esta por debajo de la gráfica del segmento de recta que une al punto $(\xi, f(\xi))$ con $(\eta, f(\eta))$.



(a) f convexa

(b) f concava

Figura 1

Lemma 1.3. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ convexa y asuma $\xi,\eta\in[a,b]$ tales que $\xi<\eta$. Con ellos defina $I\subset\mathbb{R}$ el intervalo con extremos $f(\xi)$ y $f(\eta)$. Si $\mathcal{L}:[\xi,\eta]\to I$ es la función cuya gráfica es el segmento de recta que pasa por $(\xi,f(\xi))$ y $(\eta,f(\eta))$. Entonces $f(x)\le\mathcal{L}(x)$ para toda $x\in[\xi,\eta]$.*

Demostración. Primero notemos que si $x\in[\xi,\eta]$ entonces $x=(1-t)\xi+t\eta$ para algún $t\in[0,1]$. No es difícil ver que

$$\mathcal{L}(x) = \frac{f(\eta)-f(\xi)}{\eta-\xi}(x-\xi)+f(\xi)$$

o en términos de t,

$$\mathcal{L}((1-t)\xi+t\eta) = \frac{f(\eta)-f(\xi)}{\eta-\xi}((1-t)\xi+t\eta-\xi)+f(\xi) = (1-t)f(\xi)+tf(\eta).$$

como f es convexa tenemos

$$f(x) = f((1-t)\xi+t\eta) \le (1-t)f(\xi)+tf(\eta) = \mathcal{L}((1-t)\xi+t\eta) = \mathcal{L}(x)$$

□

Nota que si asumimos f concava, al aplicar el lema anterior a $-f$ concluimos el siguiente corolario.

Corolario 1.4. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ concava y asuma $\xi,\eta\in[a,b]$ tales que $\xi<\eta$. Con ellos defina $I\subset\mathbb{R}$ el intervalo con extremos $f(\xi)$ y $f(\eta)$. Si $\mathcal{L}:[\xi,\eta]\to I$ es la función cuya gráfica es el segmento de recta que pasa por $(\xi,f(\xi))$ y $(\eta,f(\eta))$. Entonces $f(x)\ge\mathcal{L}(x)$ para toda $x\in[\xi,\eta]$.*

Teorema 1. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y diferenciable en (a,b) tal que f' es creciente (estricto) en (a,b) entonces f es convexa (estricta). Conversamente, si f es convexa (estricta) y tiene segundas derivadas en (a,b) entonces $f''\ge 0$ ($f''>0$) en (a,b).*

Demostración. Asuma $\xi\in(a,b)$ entonces $\xi=(1-t)a+tb$ para algún $t\in(0,1)$. Nota que $f(\xi)=(1-t)f(\xi)+tf(\xi)$; con estos dos resultados estimemos la diferencia entre $f(\xi)$ y la combinación convexa $(1-t)f(a)+tf(b)$.

$$f(\xi)-(1-t)f(a)-tf(b) = (1-t)(f(\xi)-f(a))+t(f(\xi)-f(b))$$

Como f es diferenciable en (a, b), sabemos que:

$$\begin{aligned} f(\xi) - f(a) &= f'(\eta_1)(\xi - a) \qquad \text{para algún } \eta_1 \in (a, \xi) \\ f(b) - f(\xi) &= f'(\eta_2)(b - \xi) \qquad \text{para algún } \eta_2 \in (\xi, b) \end{aligned}$$

usando estas últimas dos desigualdades y el resultado 3 del lema 1.1 tendremos:

$$\begin{aligned} f(\xi) - (1-t)f(a) - tf(b) =& (1-t)f'(\eta_1)(\xi - a) - tf'(\eta_2)(b - \xi) \\ =& (1-t)tf'(\eta_1)(b-a) - t(1-t)f'(\eta_2)(b-a) \\ =& t(1-t)(b-a)(f'(\eta_1) - f'(\eta_2)) \end{aligned}$$

Es decir

$$f((1-t)a - tb) - (1-t)f(a) - tf(b) = t(1-t)(b-a)(f'(\eta_1) - f'(\eta_2)), \qquad \text{para algunos } \eta_1 < \eta_2 \tag{1.3}$$

Debido a que $b > a$ y $t \in (0, 1)$ tenemos $t(1-t)(b-a) > 0$, entonces si f' es creciente (estricto) tenemos $f'(\eta_1) - f'(\eta_2) \leq 0$ (o $f'(\eta_1) - f'(\eta_2) < 0$ para el caso creciente estricto) de donde concluimos

$$f((1-t)a - tb) - (1-t)f(a) - tf(b) \begin{cases} \leq 0 & \text{si } f' \text{ es creciente} \\ < 0 & \text{si } f' \text{ es creciente estricto} \end{cases}$$

Por tanto f es (estrictamente) convexa si f' es (estrictamente) creciente.

Para la segunda afirmación notemos si f es convexa entonces

$$0 \geq f((1-t)a - tb) - (1-t)f(a) - tf(b). \tag{1.4}$$

Además, como f posee segundas derivadas, podemos volver aplicar el teorema del valor medio para $f'(\eta_1) - f'(\eta_2)$ y obtener de ecuación (1.3)

$$\begin{aligned} f((1-t)a - tb) - (1-t)f(a) - tf(b) =& t(1-t)(b-a)(f'(\eta_1) - f'(\eta_2)) \\ =& - t(1-t)(b-a)(\eta_2 - \eta_1)f''(\eta) \end{aligned}$$

Al juntar la última ecuación con ecuación (1.4) concluimos que

$$0 \leq t(1-t)(b-a)(\eta_2 - \eta_1)f''(\eta)$$

y como $t(1-t)(b-a)(\eta_2 - \eta_1) > 0$ obtenemos $f'' \geq 0$. El caso de convexidad extricta se sigue usando la desigualdad estricta en ecuación (1.4) □

Corolario 1.5. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y diferenciable en (a, b) tal que f' es decreciente (estricto) en (a, b) entonces f es concava (estricta). Conversamente, si f es concava (estricta) y tiene segundas derivadas en (a,b) entonces $f'' \leq 0$ ($f'' < 0$) en (a, b).*

Demostración. Se siguie de aplicar el lema anterior a $-f$. □

Definición 4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Decimos que una función *cambia de concavidad* en $\xi \in (a, b)$ si f es convexa (concava) para $x < \xi$ y f es concava (convexa) para $x > \xi$.

Observa que la convexidad de una función f es independiente de la existencia de puntos críticos ya que en ningún momento se requirió que primero se anule la derivada para después revisar convexidad. El siguiente resultado es aplicable para los puntos de inflexión (donde sucede que $f'(\xi) = 0 = f''(x)$). De hecho este resultado habla cambio de concavidad en funciones a partir del comportamiento de la derivada.

Corolario 1.6. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y dos veces diferenciable en (a, b). Si existe $\xi \in (a, b)$ tal que f' tiene un extremo local en ξ entonces la concavidad de f cambia en ξ.*

Demostración. Asuma que $\xi \in (a, b)$ es máximo de f', por ser máximo local sabemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 \quad & \text{si } 0 < \xi - x < \delta \\ f''(x) < 0 \quad & \text{si } 0 < x - \xi < \delta \end{aligned}$$

Debido al Teorema 1.4 y el corolario 1.5 tenemos:

$$\begin{aligned} f \text{ es convexa} \quad & \text{si } 0 < \xi - x < \delta \\ f \text{ es concava} \quad & \text{si } 0 < x - \xi < \delta \end{aligned}$$

y por tanto en ξ la función f cambia de convexa a concava.

Si ahora asumimos que $\xi \in (a, b)$ es mínimo local de f' por un razonamiento análogo concluimos que en ξ la función f cambia de concava a convexa. □

A continuación hacemos algunos ejemplos sobre convexidad. Para ello asumiremos como dominio al intervalo $[a, b]$

1. $f(x) = mx + d$ con $m, d \in \mathbb{R}$ constantes es convexa y concava a la vez.

   Sea $t \in [0, 1]$, entonces

$$\begin{aligned} f((1-t)a + tb) =& m((1-t)a + tb) + d \\ =& m((1-t)a + tb) + ((1-t)d + td) \\ =& (1-t)(ma + d) + t(mb + d) \\ =& (1-t)f(a) + tf(b) \end{aligned}$$

   Como se mantiene la igualdad tenemos que f es concava y convexa a la vez.

2. $f(x) = kx^2$ es convexa para $k > 0$ y concava para $k < 0$.

   Como $f \in C^2([a, b])$ podemos tomar la segunda derivada, de donde $f''(x) = 2a$, es decir f es convexa si $a > 0$ y concava si $a < 0$.

3. $f(x) = e^x$ es convexa.

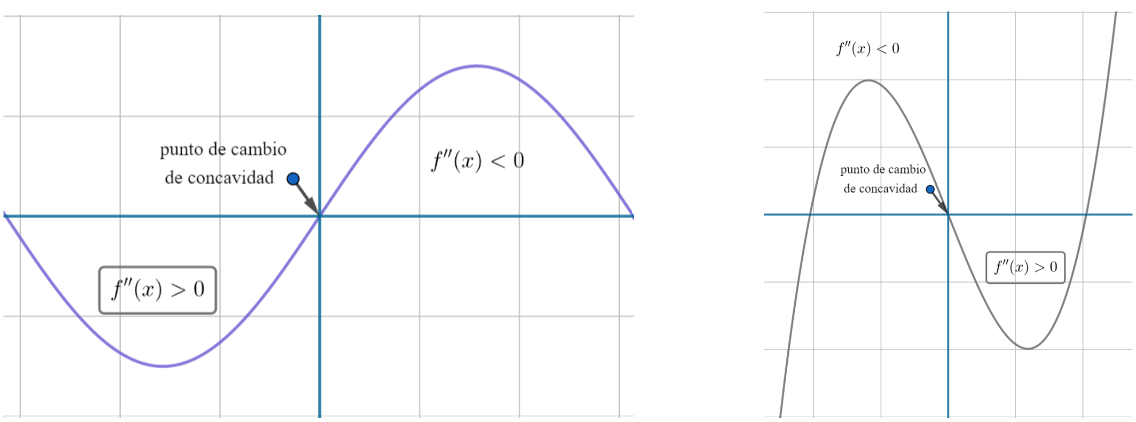
   Como $f \in C^2([a, b])$ podemos tomar la segunda derivada, de donde $f''(x) = e^x > 0$ y por tanto es convexa

4. $f(x) = \sin x$ es convexa en $(-\pi, 0)$ y concava en $(0, \pi)$.

   Como $f \in C^2$ podemos tomar la segunda derivada $f''(x) = -\sin x$, de donde $f''(x) > 0$ si $x \in (-\pi, 0)$ y $f''(x) < 0$ si $x \in (0, \pi)$ de donde se concluye la afirmación. De hecho notemos que $f''(0) = 0$, es decir f' tiene un punto crítico en $x = 0$ al tomar la segunda derivada de f' ($f'''(0) = -\cos 0 = -1 < 0$) concluimos que f' tiene un máximo en $x = 0$ y por el corolario 1.6 tenemos que f cambia de convexa a concava al pasar por $x = 0$.

5. $f(x) = x(x^2 - a^2)$ con $x \in \mathbb{R}$ y con $a \neq 0$ fija.

   Por ser un polinomio, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ de donde $f''(x) = 6x$ por ello f es concava en $(-\infty, 0)$ y convexa en $(0, \infty)$. Además f' tiene un mínimo en $x = 0$ pues $(f')'(0) = f''(0) = 0$ pero $(f')''(0) = f'''(0) > 0$ tenemos una transición de concava a convexa en $x = 0$



(a) $f(x) = \sin x$ (b) $f(x) = x(x^2 - a^2)$

Figura 2