Funciones y cardinalidad de conjuntos

Lauro Morales Montesinos

Marzo 2023

1. Resultados principales

Definición 1. Sean A y B dos conjuntos. Llamamos relación $R(A, B)$ a toda familia de de pares ordenados (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$. Decimos que R es una *función de A a B* (se denota por $R : A \to B$) si para cada $a \in A$ existe a lo más un elemento $(a, b) \in R$ con $b \in B$. A A se le conoce como *espacio dominio* y B se llama *espacio codominio*.

Si sucede que para cada $a \in A$ existe un único elemento $(a, b) \in R$ con $b \in B$ entonces a A se le llama *dominio* de R ($\operatorname{Dom} R$) y decimos que el valor $b \in B$ es función de $a \in A$ que se denota por $b = R(a)$. Por ello se dice que R es la *regla de asignación*. Por otro lado, llamamos *imagen* o *rango* de una función R ($\operatorname{Im} R$) al conjunto de valores $b = R(a)$ donde $a \in A$.

Para el caso donde f es una regla de asignación de $\mathbb{R}$ en si mismo. Llamamos *dominio natural* de f al conjunto maximal de $x \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) \in \mathbb{R}$.

IMPORTANTE: Para determinar una función NO es suficente con especificar una regla de asignación, ya que puede haber un sin fin de conjuntos dominios; por ello es necesario especificar (1) la regla de correspondecia (2) el dominio y (3) el codominio.

Definición 2. Sean A, B dos subconjuntos y $f : A \to B$ una función, decimos que:

1. f es inyectiva (1-1) si sucede que si $f(x) = f(y)$ entonces $x = y$.
2. f es suprayectiva (sobre) si para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.
3. f es biyectiva si f es inyectiva y sobreyectiva.

Se puede probar fácilmente la siguiente equivalencia.

Teorema 1. *Sean A, B dos subconjuntos y $f : A \to B$ una función.*

1. *f es inyectiva si y sólo si para cada $b \in B$ existe a lo más un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$.*
2. *f es suprayectiva si y sólo si para cada $b \in B$ existe al menos un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$.*
3. *f es biyectiva si y sólo si para cada $b \in B$ existe un único elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$*

Si nos detenemos a pensar un poco en el proceso de determinar entre dos conjuntos finitos A y B dados, cual de ellos tiene más elementos, una forma de hacer esto es “tachar” un elemento en A y al mismo tiempo un elemento en B, y dado que ambos tienen un número finito de elementos, este proceso terminará eventualmente de donde se obtendrá sólo uno de los siguientes tres escenarios finales:

1. Todos los elementos en A han sido tachados pero hay elementos en B sin tachar.
2. Todos los elementos en A han sido tachados al igual que todos los elementos en B.
3. Todos los elementos en B han sido tachados pero hay elementos en A sin tachar.

En el primer escenario decimos que B tiene más elementos que A, mientras que en el segundo decimos que A y B tienen el mismo número de elementos y finalmente en el tercer escenario decimos que A tiene más elementos que B. Observa que el proceso de tachar elementos en cada conjunto A y B simultaneamente se puede representar por una función $f : A \to B$ inyectiva donde :

1. $\operatorname{Dom} f = A$ y f no es sobreyectiva.

2. $\operatorname{Dom} f = A$ y f es sobreyectiva (f es invertible).

3. $\operatorname{Dom} f \subset A$ y f es sobreyectiva

Con esta abstracción podemos generalizar la noción "tiene más elementos que" al término "cardinalidad" y como A y B son insdistinguibles (podemos intercambiar A con B) nos bastará con generalizar esta noción para dos de los tres casos anteriores en conjuntos que no sean finitos.

Definición 3. Sean A, B dos conjuntos decimos que:

1. A y B tienen la misma cardinalidad ($\#A = \#B$) si existe una biyección $f : A \to B$.

2. La cardinalidad de A es mayor o igual a la de B ($\#A \geq \#B$) si existe $f : A \to B$ función suprayectiva.

Observa que en el inciso (1) sucede que $\operatorname{Dom} f = A$, mientras que en el inciso (2) sucede que $\operatorname{Dom} f \subseteq A$ debido a la definición usada de función.

Definición 4. Sea A subconjunto decimos que A es *numerable* si existe $f : \mathbb{N} \to A$ suprayectiva.

Observa que A es *no numerable* si para toda $f : \mathbb{N} \to A$ se cumple que f no es suprayectiva, en otras palabras (por definición 3 (3)) $\#N < \#A$.

Teorema 2. *Sean A, B dos conjuntos tales que $A \subset B$.*

1. *Si B es numerable entonces A es numerable*

2. *Si A es no numerable entonces B es no numerable.*

Demostración. Asuma B numerable, entonces existe $f : \mathbb{N} \to B$ suprayectiva. Sea $a \in A$ un elemento arbitrario pero fijo de A y defina $g : \mathbb{N} \to A$ como

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \in A \\ a & \text{si } f(x) \notin A \end{cases}$$

Como f es supra y $A \subset B$, es inmediato que g es supra y por tanto A es numerable.

Para el segundo inciso procedemos por contradicción. Es decir, asumimos que A es no numerable pero B es numerable. Por el inciso (1) ya probado concluimos que A debe ser numerable, lo cual es una contradicción a nuestra hipótesis inicial de modo que el asumir que B es numerable es falso y la prueba esta terminada. $\square$

Teorema 3. *Sean A, B conjuntos.*

1. *Si ambos son numerables entonces $A \cup B$ es numerable.*

2. *Si alguno es no numerable entonces $A \cup B$ es no numerable.*

Demostración. PRUEBA DE (1): si ambos son numerables entonces existen $f_1 : \mathbb{N} \to A$ y $f_2 : \mathbb{N} \to B$ suprayectivas. Defina $f : \mathbb{N} \to A \cup B$ como

$$f(n) := \begin{cases} f_1(n/2) & \text{si } n \text{ par} \\ f_2((n+1)/2) & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

Observa que f es supra ya que si $x \in A \cup B$ entonces $x \in A$ o $x \in B$. Si $x \in A$ entonces por ser f_1 supra existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f_1(m) = x$ entonces si $n = 2m$ tenemos que

$$f(n) = f(2m) = f_1(2m/2) = f(m) = x$$

Por otro lado si $x \in B$ entonces por la suprayectividad de f_2 existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $f_2(\ell) = x$. Con ello si escogemos $n = 2\ell - 1$ tenemos

$$f(n) = f(2\ell - 1) = f_2(\ell) = x$$

Ambos casos prueban que $f : \mathbb{N} \to A \cup B$ es supra y por tanto $A \cup B$ es numerable.

PRUEBA DE (2): Sin pérdida de generalidad asuma que A es no numerable, como $A \subset A \cup B$ por el teorema anterior concluimos que $A \cup B$ es no numerable. $\square$

Corolario 1.1. *La unión finita de conjuntos numerables es numerable.*

Demostración. La demostración se sigue por inducción y la base de inducción es el inciso (1) del teorema anterior. Se deja al lector completar los detalles. □

Teorema 4. *Sean $A = (0, 1]$, $B = [1, \infty)$, $C = (a, b]$ con $a \neq b$.*

1. $\#A = \#B$
2. $\#A = \#C$

Demostración. PRUEBA DE (1): Basta con notar que $f : A \to B$ dada por $f(x) = 1/x$ es biyectiva (se probó en clase) .

PRUEBA DE (2): Basta con notar que $f : A \to C$ dada por $f(x) = a + x(b - a)$ es biyectiva (se probó en clase). □

Onserva que debido a las fracciones equivalentes, un numero racional $x = p/q$ tiene varias representaciones ya que $x = pn/qn$ para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; pero si pensamos a los racionales como los números que se escriben como fracciones y no como fracciones en si, tendremos una representación única (para aquellos que conozcan de relaciones de equivalencia y espacio cociente se define la relación $\sim$ en el conjunto $\mathbb{A} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ como $p/q \sim a/b$ si $p = an$ y $q = bn$ para algun $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ entonces el espacio cociente $\mathbb{A} \setminus \sim = \mathbb{Q}$), es decir pensamos al conjunto de los racionales como:

$$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \text{ y } p, q \text{ no tienen factores en común}\}$$

podemos probar el siguiente resultado:

Teorema 5. $\#((0, 1] \cap \mathbb{Q}) = \#([1, \infty) \cap \mathbb{Q})$

Demostración. Notemos que

$$(0, 1] \cap \mathbb{Q} = \{p/q \mid 0 < p \leq q\ p, q \in \mathbb{N},\ \text{ y } p, q \text{ no tienen factores en común}\}$$

$$[1, \infty) \cap \mathbb{Q} = \{q/p \mid 0 < p \leq q\ p, q \in \mathbb{N},\ \text{ y } p, q \text{ no tienen factores en común}\}$$

De este modo, la función $f : (0, 1] \cap \mathbb{Q} \to [1, \infty) \cap \mathbb{Q}$ dada por $f(x) = 1/x$ es biyectiva. De hecho, es inyectiva ya que si $f(x) = f(y)$ para $x, y \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$ entonces existen naturales $0 < p \leq q$ y $0 < a \leq b$ tales que

$$\frac{q}{p} = \frac{b}{a}$$

pero esto solo pasa cuando $q = nb$ y $p = na$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Como p y q no tienen factores en común concluimos que esto solo es posible si $n = 1$ es decir $p = a$ y $q = b$ de donde $x = p/q = a/b = y$.

Además $f(x)$ es suprayectiva, ya que $y \in [1, \infty) \cap \mathbb{Q}$ entonces existen $0 < p \leq q$ con $p, q \in \mathbb{N}$, p, q no tienen factores en común tales que:

$$y = q/p = 1/(p/q) = f(p/q)$$

con $p, q \in \mathbb{N}$, p, q no tienen factores *i.e.* $p/q \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$. □

DISCUSIÓN: El teorema 4 nos dice que la cardinalidad del intervalo $(a, b]$ con $a \neq b$ es la misma sin importar los valores de a y b. Mientras que el teorema 5 indica que el conjunto de los racionales contenidos en $(0, 1]$ tiene la misma cardinalidad que el conjunto de los racionales contenidos en $[1, \infty)$.

2. Aplicaciones a los reales

Proposición 2.1. *El conjunto de los enteros es numerable.*

Demostración. Observe que $\mathbb{Z}$ lo puedo escribir como la siguiente únion disjunta

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{Z} \setminus (\{0\} \cup \mathbb{N})) \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$

Como las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \setminus (\{0\} \cup \mathbb{N})$, $g : \mathbb{N} \to \{0\}$ y $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dadas por las reglas de asignación $f(n) = -n$, $g(n) = 0$ y $h(n) = n$ son sobreyectivas concluimos que los conjuntos $(\mathbb{Z} \setminus (\{0\} \cup \mathbb{N}))$, $\{0\}$ y $\mathbb{N}$ son numerables. y por el corolario 1.1, concluimos que $\mathbb{Z}$ es numerable. □

Proposición 2.2. *El conjunto de los racionales es numerable.*

Demostración. Primero probaremos que $\mathbb{Q}\cap(0,1]$ es numerable. para ello asuma en la demostración la siguiente notación: Sean $a, b \in \mathbb{N}$ denotamos $(a, b] \subset \mathbb{N}$ como $(a, b] := \{n \in \mathbb{N} \mid n > a \text{ y } n \leq b\}$. Con esta definición se puede probar que:

$$\mathbb{N} = \bigcup_{q\in\mathbb{N}} \left(\frac{q(q-1)}{2}, \frac{q(q+1)}{2} \right]$$

y esta unión es disjunta (TAREA MORAL). Ahora definamos la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap (0, 1]$ dada por $f(n) = p(n)/q(n)$ donde $q(n) \in \mathbb{N}$ es el entero tal que

$$\frac{q(q-1)}{2} < n \leq \frac{q(q+1)}{2},$$

y $p = n - q(q-1)/2$. Por definición es inmediato que $p > 0$ y $p = n - q(q-1)/2 \leq q$ de modo que $p/q \in (0, 1]$. Esta función es sobreyectiva ya que si $x \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$ entonces existen $0 < p \leq q$ tales que $x = p/q$. Entonces basta con escoger $n = q(q-1)/2 + p$, ya que de este modo:

$$f(n) = f(q(q-1)/2 + p) = p/q$$

pues $q(q-1)/2 < n \leq q(q+1)/2$ ya que $p \leq q$ y $p = n - q(q-1)/2$. Por lo tanto $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ es numerable. Por el teorema 5, sabemos que $\#(\mathbb{Q} \cap (0, 1]) = \#(\mathbb{Q} \cap [1, \infty))$, y por tanto $\mathbb{Q} \cap [1, \infty)$ también es numerable. Observa que $\mathbb{Q}$ se escribe como la siguiente unión disjunta:

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, -1)) \cup (\mathbb{Q} \cap [-1, 0)) \cup \{0\} \cup (\mathbb{Q} \cap (0, 1]) \cup (\mathbb{Q} \cap (1, \infty))$$

Como $(\mathbb{Q} \cap (1, \infty)) \subset (\mathbb{Q} \cap [1, \infty))$ por teorema 2 tenemos que el primero de estos conjuntos es numerable. Por el corolario 1.1 concluimos que $(0, \infty) \cap \mathbb{Q}$ es numerable pues es la unión de dos conjuntos numerables, a saber $(\mathbb{Q} \cap (0, 1])$ y $(\mathbb{Q} \cap (1, \infty))$. Además es inmediato ver que $f : (0, \infty) \cap \mathbb{Q} \to (-\infty, 0) \cap \mathbb{Q}$ dada por $f(x) = -x$ es una biyección de modo que por definición 3 concluimos que $(-\infty, 0) \cap \mathbb{Q}$ es también numerable. Como $\{0\}$ es numerable concluimos que $\mathbb{Q}$ es numerable por se la unión de tres conjuntos numerables, a saber $(-\infty, 0) \cap \mathbb{Q}$, $\{0\}$ y $(0, \infty) \cap \mathbb{Q}$ y con ello la proposción esta probada. □

Proposición 2.3. *El intervalo* $[0, 1]$ *es no numerable.*

Demostración. Procedemos por contradicción. Entonces asuma que $[0, 1]$ es numerable y por ende existe una numeración de sus elementos (existe $f : \mathbb{N} \to [0, 1]$ suprayectiva). Asuma que entonces que $[0, 1] = \{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$ Escojamos $I_1 \subset [0, 1]$ intervalo cerrado tal que $x_1 \notin I_1$. Después escojamos $I_2 \subset I_1$ intrvalo cerrado tal que $x_2 \notin I_2$, procediendo de manera iterativa construyamos la sucesión de intervalos cerrados anidados $\{I_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ tales que I_k es cerrado, $I_k \subset I_{k-1}$ y $x_k \notin I_k$. Por el principio de intervalos anidados (equivalente al axioma del supremos) sabemos que existe $\xi \in I_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$, de esto podemos concluir dos cosas:

- Por costrucción $\xi \notin [0, 1]\{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$ pues $x_j \notin \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$ para toda $j \in \mathbb{N}$ y $\xi \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$
- $\xi \in [0, 1]$ pues $\xi \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k \subset I_1 \subset [0, 1]$

Observa que los dos puntos anteriores forman un absurdo pues $[0, 1] \neq \emptyset$, y por ello concluimos que $[0, 1]$ es no numerable. □

Corolario 2.4. *Los intervalos* $(0, 1)$*,* $(0, 1]$*, y* $[0, 1)$ *son no numerables.*

Demostración. Realizaremos la prueba solo en el caso $(0, 1]$ pues los demás son análogos. Procedemos por contradiccón y supondremos que $(0, 1]$ es numerable. Ello implica que existe $f : \mathbb{N} \to (0, 1]$ suprayectiva. Defina entonces a la función $g : \mathbb{N} \to [0, 1]$

$$g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ f(x-1) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Como $f : \mathbb{N} \to (0, 1]$ es supreyectiva, es inmediato que $g : \mathbb{N} \to [0, 1]$ es suprayectiva y por ende $[0, 1]$ es numerable. Esto es una contradicción a la proposición 2.3. □

Proposición 2.5. *Dados* $a \neq b \in \mathbb{R}$*, los conjuntos* $[a, b], (a, b), (a, b]$ *y* $[a, b)$ *son no numerables.*

Demostración. Solo haremos uno de los cuatro casos. Observa que $f : [0,1] \to [a,b]$ dada por $f(x) = a+x(b-a)$ es biyectiva, por definición 3 concluimos que $\#[a,b] = \#[0,1]$ y como este último conjunto es no numerable tenemos que $[a,b]$ tampoco lo es. Los demás casos son análogos. $\square$

Proposición 2.6. *Sean $a < b$ reales. $\#(a,b) = \#\mathbb{R}$.*

Demostración. Basta notar que la función $f : (a,b) \to (-\pi/2, \pi/2)$ dada por

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{b-a}(b-x)$$

Es una biyección. En clase probamos que $g : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \tan(x)$ es biyección. Por tanto $g \circ f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es biyección por ser composición de dos biyecciones de donde la afirmación se sigue por definición 3. $\square$

Corolario 2.7. *El conjunto de los reales es no numerable.*

Demostración. Se sigue de la proposición anterior y de que (a,b) es no numerable. $\square$