Caracterización de conjuntos cerrados y acotados.

En clase se probó que los conjuntos cerrados y acotados son de gran importancia en cálculo, ya que las funciones continuas tiene muy buenas propiedades sobre conjuntos de este tipo.

Definición 1. *Diremos que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si para cada sucesión $\{x_n\} \subset A$ existe una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}$ convergente a un punto en A.*

Proposición 1. *A es compacto si y solo si A es cerrado y acotado.*

Demostración. Primero asuma que A es cerrado y acotado y $\{x_n\} \subset A$. Es inmediato que la sucesión es acotada y por tanto existe una subsucesión $\{x_{n_k}\} \subset A$ convergente. Dado que A es cerrado ($A = \operatorname{cl} A$), el punto al que converge pertenece a A. Dado que la sucesión fue arbitraria, concluimos que A es compacto.

Ahora asuma que A es compacto. Primero probemos que A es cerrado, para ello procedemos por contradicción y asumiremos que no lo es, entonces

$$\begin{array}{rcl} A \text{ no acotado} & \Leftrightarrow & \neg(\exists M \in \mathbb{R}^+, \text{ tal que} \forall \ \ x_m \in A, \ \ \|x\| \leq M) \\ & \Leftrightarrow & \forall M \in \mathbb{R}^+, \exists \ \ x \in A, \text{ tal que } \ \|x_m\| > M \end{array}$$

De esta forma tenemos una sucesión $\{x_m\} \subset A$ conjunto compacto y por tanto existe $\{x_{m_k}\}$ convergente y por construcción

$$\|x_{m_k}\| > m_k \quad \forall \ \ k \in \mathbb{N}.$$

Observe que está última condición contradice la convergencia de la subsucesión pues en clase se probó que cualquier sucesión convergente es acotada. Dada esta contradicción concluimos que los compactos son acotados. Ahora solo resta probar que A es cerrado. Por definición sabemos que $A \subset \operatorname{cl} A$, ahora tomemos un punto $x \in \operatorname{cl} A$. En clase se probó por ser A acotado, existe una sucesión $\{x_n\} \subset A$ convergente a x, y como A es compacto sabemos que existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ convergente an un punto en A, y como $\{x_n\}$ es convergente a x, concluimos que $x \in A$. Por tanto $A = \operatorname{cl} A$ $\square$

Definición 2. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ una colección de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$. Decimos que $\{U_i\}$ es una cubierta abierta de $A \subset \mathbb{R}^n$ si*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i.$$

Además diremos que existe una subcubierta abierta finita de A si existen $i_1, i_2, \cdots, i_m \in \mathbb{N}$ tal que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{m} U_{i_j}.$$

Lemma 1. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $\{V_i\}$ una cubierta abierta y creciente ($V_i \subset V_{i+1}$) de A, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} V_i.$$

Demostración. Procedemos por contradicción, por ello asumiremos que para cada $N \in \mathbb{N}$ $A \not\subset \cup_{i=1}^{N} V_i$; es decir existe una sucesión $\{x_i\} \subset A$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$ $x_i \notin V_i$. Observe que lo mejor que puede pasar es que el siguiente elemento de la cubierta, es decir V_{i+1}, tenga a lo más los primeros i elementos de la sucesión $\{x_i\}$ pero no el $(i+1)-$ésimo elemento. Por tanto cada elemento V_i contiene un número finito de elementos de la sucesión $\{x_i\}$.

Por otro lado, dado que $\{x_i\} \subset A$ que es compacto, existe una subsucesión $\{x_{i_k}\}$ convergente a $x_0 \in A$. Como $\{V_i\}$ es cubierta abierta de A, existe un conjunto abierto V_ℓ que contiene a x_0. Por ser abierto, sabemos que existe $r > 0$ tal que $x_0 \in B_r(x_0) \subset V_\ell$, y como la subsucesión $\{x_{i_k}\}$ es convergente a x_0 existe un número infinito de elementos de dicha subsucesión que pertenecen a $B_r(x_0) \subset V_\ell$; ello contradice que todo elemento de la cubierta tiene a lo más un conjunto finito de elementos de la sucesión y la prueba esta completa. $\square$

Otra caracterización de los conjuntos acotados fue dada por Heine y Borel. Esta caracterización de compacidad es la adecuada para espacios más generales que $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto si y solo si para cada cubierta abierta $\{U_i\}$ de A existe una subcubierta finita de A.*

Demostración. Primero asuma A compacto y $\{U_i\}$ una cubierta abierta de A. Para cada $j \in \mathbb{N}$ defina al conjunto $V_j = \cup_{i=1}^{j} U_i$. Es claro que $\{V_j\}$ es cubierta abierta y creciente de A, por el lema anterior se sigue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset \cup_{j=1}^{N} V_j$ y como

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{N} V_j = \bigcup_{j=1}^{N} \bigcup_{i=1}^{j} U_i = \bigcup_{i=1}^{N} U_i$$

concluimos la existencia de la subcubierta finita de A.

Ahora probaremos que si A satisface que para cualquier cubierta abierta $\{U_i\}$ de A existe una subcubierta finita, entonces A es compacto. Para ello considere la cubierta $\{B_i(0)\}_{i=1}^{\infty}$, dado que $A \subset \mathbb{R}^n = \cup_{i=1}^{\infty} B_i(0)$, se sigue que $\{B_i(0)\}$ es cubierta abierta de A, por tanto existen índices $i_1, i_2, \cdots, i_m$ tal que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_{i_m}(0)$$

Entonces escogiendo $M = \max\{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$, se sigue que $A \subset B_M$ *i.e.* A es acotado. Para probar que es cerrado probaremos que A^c es abierto. Sea $x \in A^c$. Es claro que $A \subset \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$, además como $x = \cap_{i=1}^{\infty} \bar{B}_{1/i}(x_0)$, por propiedades de conjuntos tenemos

$$A \subset \mathbb{R}^n \setminus \{x\} = \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{B}_{1/i}(x_0) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_{1/i}(x_0)\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{B}^c_{1/i}(x_0).$$

Observe que cada uniendo es abierto pues es el complemento de un conjunto cerrado. Es decir hemos construido una cubierta abierta de A, y por hipótesis existen índices $i_1, i_2, \cdots, i_m$ tal que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{m} \left(\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_{1/i_j}(x_0)\right) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_{1/I}(x_0) = \bar{B}^c_{1/I}(x_0).$$

Donde $I = \max\{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$, (esto es inmediato pues $\bar{B}_{1/i_j}(x_0)$ son bolas concéntricas y estamos analizando el complemento de dichas bolas). Usando propiedades de conjuntos (es decir, quitando los complementos) tenemos que $A \supset \bar{B}_{1/I}(x_0) \supset B_{1/I}(x_0)$ y por tanto la bola abierta de radio $1/I$ y centro en x_0 está completamente contenida en A^c. Por la arbitrariedad de $x \in A^c$, concluimos este conjunto es abierto y por tanto A es cerrado. $\square$