LOS REALES Y SUS PROPIEDADES

Abstract. En este escrito resumimos los axiomas de los reales y las propiedades más importantes que desprenden de ellos y que citarás en tu tarea.

Considere el conjunto de los numeros reales $\mathbb{R}$ equipado con con las operaciones binarias “suma” $(+)$ y producto “producto” $(\cdot)$.

Axiomas de campo

En los siguientes enunciados asumiremos $x, y, z \in \mathbb{R}$ arbitrarios, salvo que alguna restricción se especifique.

A0 $x + y \in \mathbb{R}$ y $x \cdot y \in \mathbb{R}$.
A1 $x + y = y + x$.
A2 $x + (y + z) = (x + y) + z$.
A3 $x \cdot y = y \cdot x$.
A4 $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
A5 $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.
A6 $\exists\ 0 \in \mathbb{R}$ tal que $x + 0 = x$ para toda $x \in \mathbb{R}$.
A7 $\exists\ 1 \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot 1 = x$ para toda $x \in \mathbb{R}$.
A8 Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = 0$.
A9 Para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot y = 1$.

Axiomas de Orden

Asuma que existe el conjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ llamado conjunto de números positivos que satisface los siguientes axiomas

A10 Para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$, se tiene que $x + y \in \mathbb{R}^+$ y $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$.
A11 Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces $x \in \mathbb{R}^+$ o $-x \in \mathbb{R}^+$, pero no ambos.
A12 $0 \notin \mathbb{R}^+$.

Axioma de completez

AS Sea $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ y $\mathcal{A}$ es acotado superiormente, entonces existe el supremo de $\mathcal{A}$.

Resultados probados a partir de axiomas de campo

T 1. *Si $a + b = b + c$ entonces $a = c$.*

T 2. *Para todo a, b existe un único x tal que $a + x = b$. x se denota por $a - b$ y en particular si $b = 0$, denotamos $0 - a$ por $-a$.*

T 3. $b - a = b + (-a)$

T 4. $-(-a) = a$

T 5. $a(-c) = -(ac)$

Date: Marzo 2023.

T 6. $a(b-c) = ab - ac$

T 7. $0 \cdot a = 0$

T 8. *Si* $ab = bc$ *y* $a \neq 0$ *entonces* $b = c$.

T 9. *Para todo* a, b *con* $a \neq 0$ *existe un único* x *tal que* $a \cdot x = b$. x *se denota por* b/a *y en particular si* $b = 1$, *denotamos* $1/a$ *por* a^{-1}.

T 10. *El neutro aditivo* (A6), *neutro multiplicativo* (A7), *inverso aditivo* (A8) *e inverso multipliativo* (A9) *son únicos.*

T 11. *Si* $a \neq 0$ *entonces* $b/a = b \cdot a^{-1}$.

T 12. *Si* $a \neq 0$ *entonces* $(a^{-1})^{-1} = a$.

T 13. *Si* $a \cdot b = 0$ *entonces* $a = 0$ *ó* $b = 0$.

Resultados probados a partir de axiomas de orden

T 14 (Ley de Tricotomía)**.** *Para todo* a, b *se satisface que solo una de las siguientes opciones:* $a > b$ *o* $a < b$ *o* $a = b$.

T 15. $a < b$ *si y sólo si* $a - c < b + c$.

T 16.

Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$.

T 17. *Si* $a \neq 0$ *entonces* $a^2 > 0$.

T 18. $1 > 0$.

T 19. $c < 0$ *si y sólo si* $0 < -c$.

T 20. $a < b$ *si y sólo si* $-a > -b$.

T 21. $a \cdot b > 0$ *si y sólo si* a *y* b *tienen el mismo signo.*

T 22. $a < c$ *y* $b < d$ *entonces* $a + b < c + d$

T 23. *Si* $0 < a < b$ *y* $0 < c < d$ *entonces* $a \cdot c < b \cdot d$.

T 24. *Si* $a < b$ *y* $b < c$ *entonces* $a < c$

T 25. *Si* $a \neq 0$ *entonces* a *y* a^{-1} *tienen el mismo signo.*

T 26. *Si* $a < b$ *y tienen el mismo signo entonces* $a^{-1} > b^{-1}$.

T 27. *Sean* $a > 0$ *y* $b > 0$. $b^2 > a^2$ *si sólo si* $b > a$.

T 28. *Sean* $a > 0$, $b > 0$ *y* $n \in \mathbb{N}$. $b^n > a^n$ *si sólo si* $b > a$.

Resultados probados sobre valor absoluto

Defina la función valor absoluto $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dada por

$$|x| \mapsto \begin{cases} -x & \text{si } -x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{si } -x = 0 \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

T 29. $|x|^2 = x^2$.

T 30. $|x| = \sqrt{x^2}$.

T 31. $|-x| = |x|$.

T 32. $|xy| = |x||y|$

T 33. $x \leq |x|$ *y* $-x \leq |x|$

T 34. $|x|^2 + |y|^2 \geq 2|x||y|$

T 35. $|x+y| \leq |x| + |y|$

T 36. $||x| - |y|| \leq |x+y|$

T 37. $|x| = \max\{x, -x\}$

T 38. *Sea* $d > 0$. $|x| < d$ *si y sólo si* $-d < x < d$

T 39. *Sea* $d > 0$. $|x| > d$ *si y sólo si* $-d > x$ *o* $x > d$

Resultados probados a partir de axiomas de completez

Definition 0.1. Sea $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ distinto de vacío. Decimos que

(1) x es máximo (mínimo) de $\mathcal{A}$ si:
  (a) $x \in \mathcal{A}$.
  (b) $\forall\ y \in \mathcal{A}$ se tiene $y \leq x$ ($y \geq x$).
(2) x es cota superior (inferior) de $\mathcal{A}$ si:
  (a) $\forall\ y \in \mathcal{A}$ se tiene $y \leq x$ ($y \geq x$).
(3) x es supremo (infimo) de $\mathcal{A}$ si:
  (a) $\forall\ y \in \mathcal{A}$ se tiene $y \leq x$ ($y \geq x$).
  (b) Si z es cota superior (inferior) de $\mathcal{A}$ entonces $z \geq x$ ($z \leq x$).

T 40. *Si* $x = \max \mathcal{A}$ *entonces* $x = \sup \mathcal{A}$.

T 41. *Si existe el supremo, el infimo, el máximo o el mínimo para un conjunto* $\mathcal{A}$ *entonces son únicos.*

T 42. *Sea* $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ *distinto de vacío y acotada inferiormente, entonces existe el infimo de* $\mathcal{A}$.

T 43. *Sea* $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ *distinto de vacío y acotado superiormente (inferiormente).* $b = \sup \mathcal{A}$ *(*$b = \inf \mathcal{A}$*) si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

(1) $\forall\ y \in \mathcal{A}$ *se tiene* $y \leq x$ *(*$y \geq x$*).*
(2) $\forall\ \epsilon > 0$ *existe* $y \in \mathcal{A}$ *tal que* $b - \epsilon < y$ *(*$b + \epsilon > y$*).*

T 44. *Sean* $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ *distintos de vacío, tales que*

$$\forall\ s \in \mathcal{S}\ \forall\ t \in \mathcal{T} \quad s < t$$

Entonces $\inf \mathcal{T}$ *y* $\sup \mathcal{S}$ *existen y satisfacen*

$$\sup \mathcal{S} \leq \inf \mathcal{T}.$$

T 45. *Sean* $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ *distintos de vacío y acotados superiormente (inferiormente). y defina al conjunto*

$$C = \{x + y \mid x \in \mathcal{S}\ y \in \mathcal{T}\}$$

Entonces $\sup C$ *(*$\inf C$*) existe y*

$$\sup C = \sup \mathcal{S} + \sup \mathcal{T}.$$

$$(\inf C = \inf \mathcal{S} + \inf \mathcal{T}.)$$