SERIES

Sea $(x_n) \subset \mathbb{R}$ sucesión, defina las *sumas parciales* s_n como $s_n = \sum_{m<n} x_m$.

La sucesión (s_n) se conoce como *la serie* generada por (x_n) y se denotará por $\sum x_m$, $\sum_{m>1} x_m$, ó $\sum_{m=1}^{\infty} x_m$.

Decimos que la serie $\sum x_m$ es:

a) *convergente* si la sucesión (s_n) es convergente.
b) *alternante* si $x_m = (-1)^{m+1}|x_m|$.
c) *absolutamente convergente* si $\sum |x_m|$ es convergente.
d) *rearreglo* de $\sum y_m$ si existe (n_k) reacomodo de (n) tal que $(x_n) = (y_{n_k})$.

OBSERVACIÓN: (s_n) convergente implica (s_n) acotada

Teorema 1. *Si (s_n) converge entonces (x_m) es nula.*

Demostración.

$$x_n = s_n - s_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0$$

□

Teorema 2. *Sean $\alpha,\ \beta,\ c \in \mathbb{R}$ tales que $\sum x_m = \alpha$, $\sum y_m = \beta$, entonces:*

$$\sum x_m + \sum y_m = \sum (x_m + y_m) = \alpha + \beta, \qquad c\sum x_m = \sum cx_m = c\alpha.$$

Demostración. Sean (s_n) y (t_n) las sumas parciales de $\sum x_m$ y $\sum y_m$ respectivamente,

$$\alpha + \beta = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m<n}(x_m + y_m) = \sum (x_m + y_m).$$

$$c\alpha = c \lim_{n\to\infty} s_n = c \lim_{n\to\infty} \sum_{m<n} x_m = \lim_{n\to\infty} \sum_{m<n} cx_m = \sum cx_m$$

□

Teorema 3. *$\sum x_m$ es convergente sii existe $m_0 \geq 1$ tal que $\sum_{m\geq m_0} x_m$ es convergente, además*

$$\sum x_n = \alpha = \sum_{m=1}^{m_0-1} x_m + \beta, \quad \beta = \sum_{n\geq m_0} x_m$$

Demostración. Sean (s_n) y (t_n) las sumas parciales de $\sum x_m$ y $\sum_{m\geq m_0} x_m$ respectivamente, para $n \geq m_0$,

$$s_n = \sum_{m=1}^{m_0-1} x_m + t_n \quad \Rightarrow \quad \sum x_m = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{m=1}^{m_0-1} x_m + \lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{m=1}^{m_0-1} x_m + \sum_{m\geq m_0} x_m$$

□

En las proposiciones 1 y 2 y el teorema 4 asumiremos que $x_n \geq 0$ para todo n.

Proposición 1. *$\sum x_m$ converge sii (s_n) es acotada superiormente.*

Demostración. s_n es creciente, pues $s_n - s_{n-1} = x_n \geq 0$, y por hipotesis es acotada, por tanto (s_n) es convergente. Conversamente, si (s_n) convergente entonces es acotada. □

Proposición 2. *Si $\sum y_m$ es rearreglo de la serie convergente $\sum x_m$, entonces $\sum y_m$ es convergente.*

Demostración. Observe que para cada $n > 0$, existe $N > 0$ tal que $\{y_1,\ y_2,\ \cdots y_n\} \subset \{x_1,\ x_2,\ \cdots x_N\}$ entonces

$$0 \leq \sum_{m\leq n} y_m \leq \sum_{m\leq N} x_m < \sum x_m < \infty.$$

Como (y_m) es sucesión de términos positivos y las sumas parciales $\sum_{m\leq n} y_m$ están acotadas superiormente concluimos que $\sum y_m$ es convergente (proposición 1). □

Teorema 4. *Si (x_n) es estrictamente decreciente y nula entonces $\sum(-1)^{n+1}x_n$ es convergente y su límite es positivo.*

Demostración. Por los teoremas de sucesiones vistos en clase, basta probar que las subsucesiones (s_{2n}) y (s_{2n+1}) son convergentes al mismo valor. Observe que para todo $n \geq 1$,

$$0 < (x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) + \cdots + (x_{2n-1} - x_{2n}) = s_{2n} = x_1 - (x_2 - x_3) - \cdots - (x_{2(n-1)} - x_{2n-1}) - x_{2n} \leq x_1.$$

Dado que (s_{2n}) es creciente respecto a n y acotada superiormente, (s_{2n}) convergente aún número positivo pues es suma de términos positivos por ser (x_n) estríctamente decreciente. Además

$$s_{2n-1} = s_{2n} - x_{2n} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n}, \quad \text{pues} \quad \lim_{n\to\infty} x_{2n} = 0$$

□

Teorema 5. *Una serie es absolutamente convergente sii cada rearreglo lo es.*

Demostración. El que cada rearreglo sea abs. conv. si la serie es abs. conv. se deduce de la proposición 2. El converso se deduce de que cualquier serie es rearreglo de ellas misma. □

Teorema 6. *Si $\sum x_m$ es absolutamente convergente entonces $\sum x_m$ es convergente.*

Demostración. Sean (s_n) y (t_n) las sumas parciales de $\sum x_m$ y $\sum |x_m|$ respectivamente, se probará que (s_n) es Cauchy dado que (t_n) lo es. Sea $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$

$$|t_m - t_n| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |s_m - s_n| = \left|\sum_{i=n+1}^{m} x_i\right| \leq \sum_{i=n+1}^{m} |x_i| = |t_m - t_n| < \epsilon$$

□

Proposición 3. *Sea (x_m) sucesión de términos positivos y defina la serie $\sum x_m$. Sea $\sum y_m$ otra serie.*

a) *$\sum x_m$ convergente y $|y_m| \leq Mx_m$ para $m \geq n_0$ y $M > 0$ fijo, entonces $\sum y_m$ es absolutamente convergente.*
b) *$\sum x_m$ divergente y $|y_m| \geq Mx_m$ para $m \geq n_0$ y $M > 0$ fijo, entonces $\sum y_m$ es divergente.*
c) *Si los elementos de (y_n) son distintos de cero, $\sum x_m$ convergente y $|y_{m+1}|/|y_m| \leq x_{m+1}/x_m$ para $m \geq n_0$, entonces $\sum y_m$ es absolutamente convergente.*
d) *Si los elementos de (y_n) son distintos de cero, $\sum x_m$ divergente y $y_{m+1}/y_m \geq x_{m+1}/x_m$ para $m \geq n_0$, entonces $\sum y_m$ es divergente.*

Proposición 4. *Sea (x_n) sucesión de términos no nulos y suponga $\lim |x_{m+1}|/|x_m| = \alpha$, $\lim \sqrt[n]{|x_{m+1}|} = \beta$ para α, β reales, entonces*

a) *Si $\min\{\alpha,\ \beta\} < 1$, entonces $\sum x_m$ converge absolutamente.*
b) *Si $\min\{\alpha,\ \beta\} > 1$, entonces $\sum x_m$ es divergente.*

Demostración.
Si $\min\{\alpha, \beta\} < 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N$ entonces $|x_{m+1}|/|x_m| \leq b < 1$ ó $\sqrt[m]{|x_m|} \leq b < 1$ para algún b fijo. Esto se justifica aplicando el ejercicio C^* de la tarea 1 a la sucesión $y_m = |x_{m+1}|/|x_m| - 1$ ó $y_m \sqrt[m]{|x_m|} - 1$ segun sea el caso. De este modo

$$|x_{N+n}| = |x_N| b^n \quad \Rightarrow \quad \sum |x_m| = \sum_{m=1}^{N} x_m + |x_N| \sum b^n < \infty, \quad \text{ó} \quad \sum |x_m| = \sum_{i=1}^{N-1} |x_i| + \sum_{m\geq M} b^m < \infty.$$

Suponga ahora $\min\{\alpha, \beta\} > 1$ puede encontrarse (por el ejercicio C^* de la tarea 1 aplicado a la sucesión correspondiente) $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N$ entonces

$$|x_{m+1}|/|x_m| \geq b > 1 \quad \text{ó} \quad |x_m| \geq b^m > 1$$

para algún b fijo. En cualquiera de los dos casos, $(|x_n|)$ no es nula, por teorema 1, la serie $\sum |x_m|$ es divergente, *i.e.* $\sum x_m$ también lo es. □