SUCESIONES

1. Definiciones

Una **sucesión** es una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Se denota comúnmente por (x_n) si el dominio de la sucesión es todo $\mathbb{N}$, *i.e.* $f(n) = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ si el dominio es $\mathbb{N} \setminus \{1, 2, \cdots, n_0 - 1\}$. La sucesión (y_k) es **subsucesión** de (x_n) si $y_k = f \circ g(k)$ donde $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es creciente estricta.

Decimos que la sucesión (x_n) es:

a) *Creciente (decreciente)* si $x_n \leq x_{n+1}$, $(x_n \geq x_{n+1})$ para $n \in \mathbb{N}$ y *estríctamente creciente (decreciente)* cuando la desigualdad es estricta.
b) *Constante* si existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $x_n = C$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
c) Acotada *superiormente (inferiormente)* si existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq C$, $(x_n \geq C)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
d) *Acotada* si es acotada inferior y superiormente.
e) *Convergente* a $\alpha \in \mathbb{R}$ si para toda $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - \alpha| < \epsilon$ si $n \geq N$. Se denota por $\lim x_n = \alpha$.
f) *nula* si es convergente a cero.
g) *Divergente* a ∞ $(-\infty)$ si para toda $M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > M$ $(x_n < -M)$ si $n \geq N$. se denota por $\lim x_n = \infty$.
h) *Cauchy* si para toda $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \epsilon$ si $n, m \geq N$.

2. Resultados sobre convergencia y divergencia

P 1. (x_n) *acotada si y sólo si existe* $K > 0$ *tal que* $|x_n| < K$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

P 2. *Si* (x_n) *es acotada existe* (y_k) *subsucesión convergente de* (x_n).

P 3. *Si* (x_n) *es convergente entonces es acotada. Más aún si* $\lim x_n \neq 0$ *exite* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* x_n *y* $\lim x_n$ *tienen el mismo signo si* $n \geq N_0$.

P 4. *Si* (x_n) *es Cauchy entonces es acotada.*

P 5. *Si* (x_n) *es Cauchy y existe* (y_k) *subsucesión convergente de* (x_n)*, entonces la sucesión original es convergente al mismo límite.*

P 6. *Sea* (x_n) *creciente (decreciente). La sucesión* (x_n) *es convergente si y sólo si es acotada superiormente (inferiormente).*

P 7. *Si* (x_n) *es convergente si y sólo si es Cauchy.*

P 8. *Sea* (x_n) *sucesión de términos distintos de cero.* $(|x_n|)$ *diverge a* ∞ *si y sólo si* $(1/x_n)$ *es nula.*

P 9. (x_n) *es convergente si y sólo si toda subsucesión* (y_k) *es convergente al mismo límite.*

P 10. (x_n) *converge si y sólo si existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que la subsucesión* $(x_n)_{n=k}^{\infty}$ *es convergente.*

P 11. (x_n) *convergente si y sólo si las subsucesiones* (x_{2n}) *y* (x_{2n-1}) *son convergente al mismo límite.*

P 12. *Si* (x_n) *converge a* α *entonces* $(|x_n|)$ *converge a* $|\alpha|$.

P 13. (x_n) *es nula si y sólo si* $(|x_n|)$ *es nula.*

P 14. *Si* (x_n) *converge a* $\alpha \neq 0$ *y* $x_n \neq 0$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$ *entonces* $(1/x_n)$ *es convergente a* $1/\alpha$.

P 15. *Si* (x_n) *y* (y_n) *converges a* α *y* β *respectivamente, entonces*

• $\lim(x_n \pm y_n) = \alpha \pm \beta$, • $\lim c x_n = c\alpha$, • $\lim(x_n y_n) = \alpha\beta$, • *si* (x_n) *como en* **P 14,** $\lim(y_n/x_n) = \beta/\alpha$

P 16. *Si* $\lim x_n = C \neq 0$ *y* $\lim y_n = \infty$ *entonces*

$$\lim x_n y_n = \begin{cases} \infty & si\ C > 0 \\ -\infty & si\ C < 0 \end{cases}$$

P 17. *Sean* (x_n) *y* (y_n) *son converges a* α *y* β. *Si existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n \leq y_n$ *para* $n \geq N$, *entonces* $\alpha \leq \beta$.

P 18. *Sean* (x_n) *y* (y_n) *son converges a* α. *Si existen* $N \in \mathbb{N}$ *y* (z_n) *tal que* $x_n \leq z_n \leq y_n$ *para* $n \geq N$, *entonces* $\lim z_n = \alpha$.

P 19. *Sea* (y_n) *divergente a* ∞ *y* (x_n) *sucesión de reales. Si existen* $N \in \mathbb{N}$ *y* $k > 0$ *tales que* $x_n \geq ky_n$ $(x_n \leq -ky_n)$ *si* $n \geq N$, *entonces* (x_n) *es divergente a* ∞ $(-\infty)$.

P 20. *Sean* $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ *para* $i = 1, 2, \cdots, p$ *y* $j = 1, 2, \cdots, q$ *con* a_p *y* b_q *distintos de cero. Defina las sucesiones* (x_n) *y* (y_n) *como* $x_n = \sum_{i=0}^{p} a_i n^i$, *e* $y_n = \sum_{i=0}^{q} b_i n^i$, *entonces*

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \begin{cases} \frac{a_p}{b_q} & si\ p = q \\ 0 & si\ p < q \\ \infty & si\ p > q\ y\ a_p/b_q > 0 \\ -\infty & si\ p > q\ y\ a_p/b_q < 0 \end{cases}$$

P 21. *Sea* (x_n) *sucesión de términos positivos tal que* $\alpha = \lim x_{n+1}/x_n$ *y* $\beta = \lim \sqrt[n]{x_n}$ *estan bien definidos.*

1. *Si* $\alpha < 1$ *ó* $\beta < 1$ *entonces* (x_n) *es nula.*
2. *Si* $\alpha > 1$ *ó* $\beta > 1$ *entonces* (x_n) *es divergente a* ∞.

P 22. *Sea* (x_n) *sucesión convergente a* $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua en* ξ, *entonces* $\lim f(x_n) = f(\alpha)$.

P 23. *Sea* (x_n) *sucesión divergente a* ∞ *y* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \beta$, *entonces* $\lim f(x_n) = \beta$.

P 24. *Si* (x_n) *es nula y* (y_n) *es acotada entonces* $(x_n y_n)$ *es nula.*